华章数学译丛

16

Real Analysis
(Third Edition)

实分析
（原书第3版）

（美）H. L. Royden 著

叶培新 译



机械工业出版社
China Machine Press

HZ BOOKS

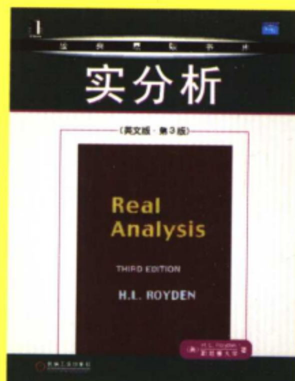
PEARSON Prentice Hall

（原书第3版）

实分析

本书为实分析课程的优秀教材，1963年出版了第1版，第3版在前两版的基础上进行了改写和补充，增加了不变测度一章。在过去的40多年中，本书已被国外众多著名大学（如斯坦福大学、哈佛大学等）采用。

本书分三部分：第一部分为实变函数论，第二部分为抽象空间，第三部分为一般测度与积分论。书中不仅包含数学定理和定义，而且还提出了富有启发性的问题，以便读者更深入地理解书中内容。本书的题材是数学教学的共同基础，包含许多数学家的研究成果。



Real Analysis

(Third Edition)



www.PearsonEd.com



影印版

ISBN 7-111-13912-7
定价：45.00元



封面设计·杨宇梅



华章图书



华章网站 http://www.hzbook.com
网上购书：www.china-pub.com
投稿热线：(010) 88379604
购书热线：(010) 68995259, 68995264
读者信箱：hzjsj@hzbook.com

ISBN 7-111-17703-7/O・460
定价：42.00 元

华章数学译丛

16

Real Analysis

(Third Edition)

实分析

（原书第3版）

（美）H. L. Royden 著

叶培新 译



机械工业出版社
China Machine Press

本书是一部实分析方面的经典教材，主要分三部分，第一部分为经典的实变函数论和经典的巴拿赫空间理论；第二部分为抽象空间理论，主要介绍分析中有用的拓扑空间以及近代巴拿赫空间理论；第三部分为一般的测度和积分论，即在第二部分理论基础上将经典的测度、积分论推广到一般情形.

本书内容详尽，论证严谨、清晰且极具启发性，分析透彻、深刻，文字叙述简洁、流畅，在取材和处理方面不仅深刻地反映了实分析的核心精神，而且包含了作者创造性的构思. 本书适合作为高等院校相关专业学生实分析课程的教材.

本书版权登记号：图字：01-2004-0900

图书在版编目（CIP）数据

实分析（原书第3版）/（美）罗伊登（Royden，H.L.）著；叶培新译．-北京：机械工业出版社，2006.1

（华章数学译丛）

书名原文：Real Analysis，Third Edition

ISBN 7-111-17703-7

Ⅰ．实…　Ⅱ．①罗…　②叶…　Ⅲ．实分析－研究生－教材　Ⅳ．O174.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2005）第125185号

机械工业出版社（北京市西城区百万庄大街22号　邮政编码　100037）

责任编辑：方　敏　迟振春

北京瑞德印刷有限公司印刷·新华书店北京发行所发行

2006年1月第1版第1次印刷

787mm×1020mm 1/16 · 19印张

印数：0 001-4 000册

定价：42.00元

凡购本书，如有倒页、脱页、缺页，由本社发行部调换

本社购书热线：(010)68326294

译 者 序

本书的英文版在国外作为数学与统计学专业研究生实分析课程的基础教材，在过去的 40 多年中，已被许多著名大学(如斯坦福大学、哈佛大学)采用.

本书主要分为三部分. 第一部分为经典的实变函数论(包括勒贝格测度、勒贝格积分、微分与积分等内容)和经典的巴拿赫空间理论(主要为 L^p 空间理论). 第二部分为抽象空间理论，主要介绍分析中有用的拓扑空间以及近代巴拿赫空间理论. 第三部分为一般的测度和积分论，即在第二部分理论基础上将经典的测度、积分论推广到很一般的情形.

本书内容详尽，论证严谨、清晰且极具启发性，分析透彻、深刻，文字叙述简洁、流畅，在取材和处理方面不仅深刻地反映了实分析的核心精神，而且包含了作者创造性的构思，特别是对不变测度以及贝尔、博雷尔测度正则性的处理更是别具匠心.

本书是一部实分析方面难得的优秀教材. 译者在力求保持 H. L. Royden 教授原著风格的基础上翻译本书，并且希望中文译本的出版能对我国相关专业的人才培养以及广大科学技术工作者有所帮助. 但限于译者水平，必定会有许多不足之处，希望广大读者指正.

本书的翻译得到了国家自然科学基金(项目号 10501026)与南开大学创新基金资助. 在本书的翻译过程中，译者得到了南开大学数学科学学院的梁科教授等的热情支持和帮助，在此表示诚挚感谢. 此外，南开大学商学院的李嵘老师、新疆伊犁师范学院数学系的高文华老师在计算机的使用以及译稿的录入方面提供了很大的帮助，在此一并致谢.

叶培新

2005 年 4 月

第3版前言

自上次修订到现在的20年来，尽管本书在贝尔测度的处理和不变测度的省略这两方面有一些缺陷，但它已经对几代学生的教育做出了贡献. 因此我很高兴有机会提供一个新版本来弥补这些缺陷. 由于这些内容对我来说是新的，要把握住原作的观点有些困难，所以我就将实质性的改动限制在局部紧空间的理论和拓扑空间的测度研究上. 其他地方的改动主要是小的改进和增加新的习题.

第一部分几乎没有变动，最值得注意的变动是闵可夫斯基不等式和赫尔德不等式的处理. 这样的处理对我来说更为自然，它使得当$0<p<1$时立刻给出相反方向的不等式. 关于测度与积分的第11章与第12章相对来说也几乎不变. 只是在第12章中增加了关于积分算子的一节与关于豪斯多夫测度的一节.

第二部分从某种程度上来说进行了重新组织和扩充：把紧度量空间和阿斯科利定理所在的小节从关于紧空间的一章移到关于度量空间的一章，使得这些题材独立于拓扑空间的一般理论. 扩展了关于贝尔范畴的内容，说明了在证明中运用该理论时所需使用的一些原理.

关于拓扑空间的第8章基本没有变动，但第9章大大地改写了，扩充了对局部紧空间的处理. 不仅建立起了测度论所需的局部紧空间的性质，且在局部紧豪斯多夫空间的背景下讨论了仿紧性、穷举和σ紧的概念. 还有一节关于流形及它们仿紧性的意义.

第10章除了一些关于凸性的内容外没有什么变化.

关于局部紧空间的贝尔测度和博雷尔测度的内容完全重写了. 第2版在这方面内容的处理上有严重缺陷. 我不是指定理和命题的事实有实际错误，而是文中有误导，并且习题中的许多陈述是错的. 主要的问题正如同其他一些出版物中一样，即非σ紧空间的测度的处理来自于正则性. 它们之所以造成误导是因为回避直接谈到正则性. 而现有的处理则直接面对这些问题，且证明了贝尔(或博雷尔)测度是内正则或拟正则的，但不总是既内正则又拟正则. 包含了这个内容就给出了$C_0(X)$上的正线性泛函的里斯-马尔可夫定理的直接证明. 该证明独立于丹尼尔积分，因此我们把丹尼尔积分放到本书的末尾.

关于测度空间的自同构的第15章被大大地重写，扩充了完备可分度量空间上的博雷尔测度的讨论. 我希望通过强调这些空间与某些标准的测度空间(特别是$\mathbf{R}$的区间上的勒贝格测度)的等价性来使我的朋友George Mackey高兴.

现有版本的第三部分包含了关于不变测度的新的一章. 因为我不满意该理论通常的建立方法，所以在先前的版本中我略去了这一主题. 我认为哈尔测度的标准表达式在用选择公理以保证加性这一点上是笨拙的，因此我想沿用巴拿赫在可分度量空间运用的极限概念的推广来代替它. 我也相信关于不变测度的适当背景是局部紧空间X上的同胚的传递群. 因此拓扑应该在齐性空间X上，其中同胚群是一个不必有拓扑结构的抽象群. 当然，这个群必须满足一些条件以使得X上存在在该群下不变的贝尔测度. 我引入了一个称为拓扑等度连续的性质，并且证明它足以保证不变测度的存在. 在包括局部紧拓扑群的许多特殊情形下，我们考虑了这种测

度的惟一性，同时也考虑了微分同胚群并引入胡尔维茨积分．该积分在许多情形下能对被积元给出具体的公式，这是它的一个优点．

在本书最初计划与编写时，一般认为勒贝格积分理论是研究生水平的内容，本书恰好设计作为一年级的研究生学时一年的课程教材．而那时本科生的课程倾向于对优秀学生也包含勒贝格积分的内容，并且发现本书也用在这个水平上的课程．因此这里所提供的内容变得困难且让人迷惑．我试图将各章安排得有相当大的独立性以使得本书可适用于多种课程．对于短期课程一种可能的选择是覆盖第一部分和第 11、12 章，这就给出了 **R** 上的微分与积分以及抽象的测度和积分基础知识的全面讨论．还可用覆盖度量空间的第 7 章和有关巴拿赫空间的一些主题的第 10 章加以补充．对那些熟悉基本的测度和积分理论以及度量空间要点的学生，可以用以下方法构造一个关于拓扑空间的测度和积分的短期课程：以第 7 章和第 8 章作为背景内容，覆盖第 9、13、14 和 15 章内容．

在写本版中关于集合论的一章时，我打算给出一种不同的观点，强调关于数学基础的各种哲学观点，且告诫人们不要离开集合所嵌入的形式系统来赋予集合本质和意义．按这种观点重写该章的尝试遭到了抵制，但我希望本书的读者在对无限集的本质形成固定的观点之前读一些关于数学基础的书．

感谢在过去的 20 年中所有给我提出改进意见的读者．Jay Jorgenson 和 Hala Khuri 阅读且检验了证明，Elizabeth Arrington 和 Elizabeth Harvey 将大量的手写改正内容转为适于印刷的稿件．在此，对他们表示特别感谢．

H. L. Royden
斯坦福大学
1987 年 7 月

第2版前言

本书是随着斯坦福大学的课程“实变函数论”一起成长起来的，这一课程在过去的十年里我已讲授多次．该课程是为数学与统计学专业的一年级研究生设计的．学习该课程要求有本科数学的一般背景以及对本科涉及分析基本概念的课程内容较为熟悉．我试图覆盖每个研究生都应该知道的经典实变函数论与测度和积分论的基本内容，以及一般拓扑与赋范线性空间理论中更为重要与基本的一些题材．这里所给出内容的处理方式在这种类型的研究生课程中是十分标准的，虽然本书中在讨论测度与积分的一般理论之前首先讨论了勒贝格测度和勒贝格积分．我发现这是一次愉快的实践，因为学生首先熟悉了一个重要的具体情形，接着就看到他所学的知识还适用于很一般的情形．

本书的各章之间有相当大的独立性，而“致学生的序言”中的附图给出了各章之间的内在联系．因此教师可以根据意愿将这里的内容安排成一个课程，处于讨论主线边缘的各节用星号(*)标记．“致学生的序言”中列出了一些记号、习惯用法且提出了一些建议．

本书的内容属于数学中的共同文化，并且反映了许多数学家独具匠心的成果．本书对它的处理特别归功于 Constantine Carathéodory、Paul Halmos 与 Stanislaw Saks 已出版的著作以及 Andrew Gleason、John Herriot 与 Lynn Loomis 的演讲和讨论．本书的第 15 章是与 John Lamperti 集中讨论的结果．

我还要感谢许多学生与同事们的有用建议和批评．对于前者，我想特别提到 Peter Loeb，他阅读了我原有版本的手稿并且帮助澄清了一些证明；我还要提到 Charles Stanton，他阅读了这个修订版的手稿，改正了陈述与命题中的一些错误．至于同事，我想特别感谢 Paul Berg，他向我指出了李特尔伍德的“三大原理”；我也想特别感谢 Herman Rubin，他在我第一次教这门课程时提供了许多定理的反例；此外还有 John Kelley，他阅读了手稿，提出了许多有用的建议且使我省略了一些注记(然而有几个以脚注的形式出现)．最后，我要感谢 Margaret Cline 将原有版本转化为打印稿时的耐心和技巧，William Glassmire 阅读了修订版的证明，ValerieYuchartz 录入该版本，Macmillan 的编辑们在我写这本书期间的体谅和鼓励．

H. L. Royden
斯坦福大学
1967 年 9 月

致学生的序言

本书覆盖了每个数学专业的研究生都必须知道的部分内容. 因为想不出一个更好的名字，所以就把这里的内容称为实分析，用这个名字是指现代数学中那些根植于经典的实变函数论的部分. 其中包括经典的实变函数论自身、测度和积分、点集拓扑以及赋范线性空间的理论. 本书相应地分为三部分. 第一部分是经典的函数论，其中包括经典的巴拿赫空间. 第二部分是一般拓扑与一般巴拿赫空间的理论，第三部分是测度与积分的抽象处理.

预备知识. 假定读者已经对实变连续函数的主要定理和黎曼积分有所了解，本书没有正式使用该知识，而第 2 章(正式地)提供了所需的全部基本定理. 不过，本书第 2 章内容只进行简要论述，目的是回顾和作为后面各章的导言. 因此对于该知识不甚了解的读者或许会发现这里的内容难于学习. 另外，我们还假定读者对于一般本科课程中讲授的现代代数基础知识有所了解. 在一些边缘的节用到了群和环的定义和基本性质，而且在第 10 章用到线性向量空间的基本概念. 集合论则贯穿全书所有内容，在本书第 1 章中论述该理论时对一些基本事实进行了概括. 由于其他部分充满了集合论的应用，因此学生应该在学习本书的过程中适应集合论的论述方式. 建议读者首先粗读第 1 章，以后在需要时再回过头来重新复习. 在 Halmos[6][⊖]和 Suppes[14]中对于集合论有更为全面透彻的论述，相信可以对读者阅读本书有所帮助.

1

逻辑符号. 使用某些逻辑表达式的缩写是比较方便的. 我们用“&”表示“和”，所以“$A\&B$”是指“A 和 B”；“$\vee$”表示“或”，所以“$A\vee B$”是指“A 或 B”；“$\neg$”表示“非”或“否”，所以“$\neg A$”是指“非 A”. 另一个经常使用的重要符号是“$\Rightarrow$”. 它有许多同义词，“$A\Rightarrow B$”可表达为“如果 A 成立，B 亦成立”，“A 蕴涵 B”，“A 成立仅当 B 成立”，“A 是 B 的充分条件”，“B 是 A 的必要条件”. 表达式“$A\Rightarrow B$”等价于“$(\neg A)\vee B$”和“$\neg(A\&(\neg B))$”. 此外，还使用像“$A\Leftrightarrow B$”的符号，这表示“$(A\Rightarrow B)\&(B\Rightarrow A)$”. “$A\Leftrightarrow B$”等价于“$A$ 成立当且仅当 B 成立”，“A iff B”，“A 等价于 B”，“A 是 B 的充分必要条件”.

除前面的符号外，我们另外使用两个缩写：“(x)”表示“对于全体 x”或“对于每一个 x”，而“$(\exists x)$”表示“存在一个 x”或“对于某一个 x”. 因此表达式 $(x)(\exists y)(x<y)$ 是指对于每一个 x 都存在一个 y 大于 x. 类似地，$(\exists y)(x)(x<y)$ 是指存在一个 y 大于每一个 x. 要注意这两个陈述是不同的：应用于实数时，第一个陈述正确，而第二个陈述错误.

由于说存在一个 x 使得 $A(x)$ 并不意味着对于每个 x 有 $\neg A(x)$，所以 $(\exists x)A(x)\Leftrightarrow\neg(x)\neg A(x)$. 类似地，$(x)A(x)\Leftrightarrow\neg(\exists x)\neg A(x)$. 这个规则在我们想要表达复杂陈述的否定时常常是方便的. 因此

---

* 此为原书页码. ——编辑注

⊖ 括号中的数字参见本书后面的“参考文献”.

$$\neg\{(x)(\exists y)(x<y)\}\Leftrightarrow\neg(x)\neg(y)\neg(x<y)$$
$$\Leftrightarrow(\exists x)(y)\neg(x<y)$$
$$(\exists x)(y)(y\leqslant x),$$

2

其中我们用实数的性质推出$\neg(x<y)\Leftrightarrow(y\leqslant x)$.

有时我们也对标准的逻辑符号进行略微的改动. 我们写 $(\varepsilon>0)(\cdots)$，$(\exists\delta>0)(\cdots)$，$(\exists x\in A)(\cdots)$，意味着"对于每个大于 0 的$\varepsilon(\cdots)$"，"存在一个大于 0 的$\delta$使得$(\cdots)$"，"存在集合 A 中的一个 x 使得$(\cdots)$". 这种改动简化了表达. 例如，用标准逻辑符号，$(\varepsilon>0)(\cdots)$应写为$(\varepsilon)\{(\varepsilon>0)\Rightarrow(\cdots)\}$.

关于如何正式地使用逻辑符号的全面论述，可参考 Suppes[14].

陈述及其证明. 绝大多数数学中的主要陈述(定理、命题等)有其标准的形式："如果 A，那么 B"或者用符号表达为"$A\Rightarrow B$". $A\Rightarrow B$ 的*逆否命题*为$(\neg B)\Rightarrow(\neg A)$. 很显然，一个陈述和它的逆否命题是等价的；也就是说，如果一个为真，另一个亦为真. 证明一个形如"$A\Rightarrow B$"的定理的直接方法是从 A 开始，推出它的各个结论，然后以 B 结束. 有时用逆否法更容易证明一个定理，即从$\neg B$ 开始导出$\neg A$. 第三种证明方法是反证法或*归谬法*：从 A 和$\neg B$ 开始，导出矛盾. 强烈建议不要使用反证法！这有两个理由：首先，这样的证明通常有错，最后的矛盾是由前面的错误推导而不是 A 与$\neg B$ 的不相容性引起的. 其次，即使正确，也看不出多少 A 与 B 之间的联系. 而直接证明与逆否证明构造了连接 A 与 B 的论证的链. 用反证法比用直接证法和逆否证法容易出错的原因是，在直接方法中(假定假设不总是错的)，当假设成立时，所有从假设推导出的陈述是正确的，类似地，对于逆否法，当结论是错的时候，从结论的否推导出的陈述是正确的. 这两种方法，一种处理的是正确的陈述，一种是关于什么是正确的直觉和知识，它们有助于避免做出错误的陈述. 然而，用反证法，你假定了不真实的世界(假定定理是正确的)，其中任何陈述都可推导出来，因而陈述的错误显示不出错误的推理.

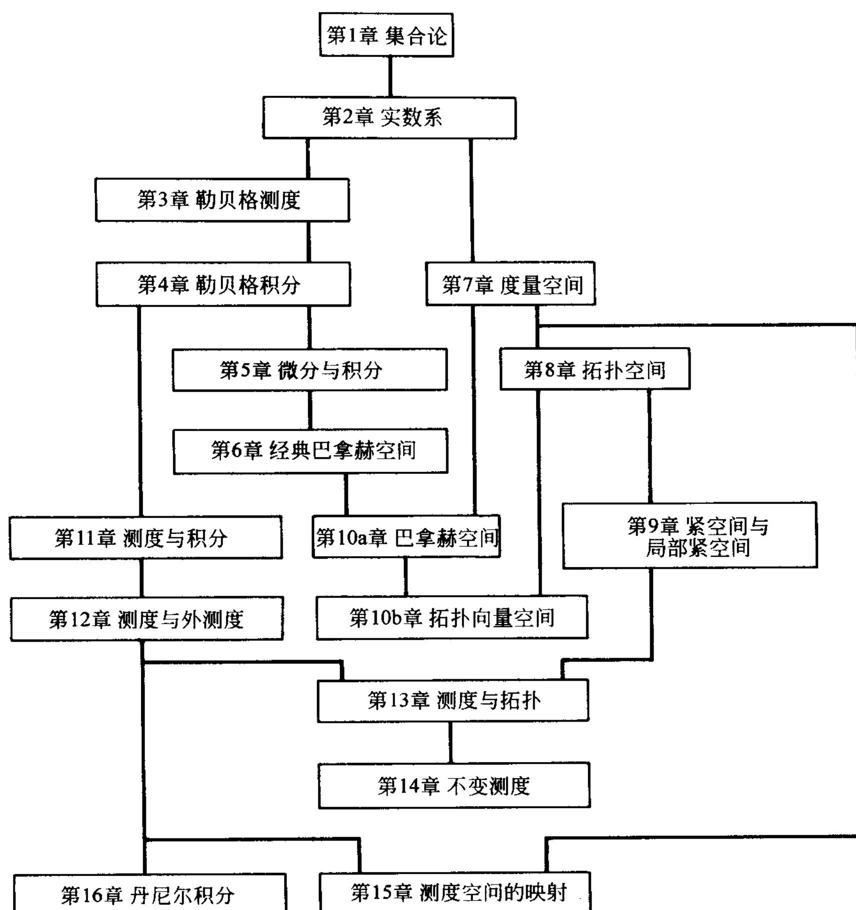
3

本书每一章的主要陈述连续依次编号，它们以引理、命题、定理或系的形式出现. 定理将被经常使用，因此应该记住. 命题本身也有独立的意义但不经常使用，而引理通常仅用来证明本节的命题和定理. 同一章引用的陈述使用编号说明，如定理 17. 引用其他章的陈述以形如命题 3.21 出现，意思是第 3 章的命题 21. 关于习题也使用了类似的约定. 本书尽量避免各章之间陈述的引用，而是用诸如"勒贝格收敛定理"来命名定理；还有一些对编号的陈述的引用，它们大多是辅助性的引用，学生应该知道而不一定去参考.

定理、命题等的证明以"**证明**"开始而以符号"■"结束. "■"的含义是"这完成了证明". 若一个定理具有形式"$A\Leftrightarrow B$"，则证明通常分为两部分：一是"仅当"部分，证明 $A\Rightarrow B$；二是"当"部分，证明 $B\Rightarrow A$.

各章之间的关联性. 每一章和前面各章的关联可参阅下图. 10a 表示 10.1～10.4 和 10.8 节；10b 表示 10.5～10.7 节.

4


第1章 集合论
第2章 实数系
第3章 勒贝格测度
第4章 勒贝格积分
第7章 度量空间
第5章 微分与积分
第8章 拓扑空间
第6章 经典巴拿赫空间
第11章 测度与积分
第10a章 巴拿赫空间
第9章 紧空间与
局部紧空间
第12章 测度与外测度
第10b章 拓扑向量空间
第13章 测度与拓扑
第14章 不变测度
第16章 丹尼尔积分
第15章 测度空间的映射

目　录

第三部分 一般测度与积分论

第1章 集 合 论

1.1 引言

集合论是现代数学最重要的工具之一. 对集合及其在数学基础中的使用的研究始于19世纪与20世纪之交的康托尔、弗雷格、罗素等人，他们的研究似乎表明所有数学都可以仅仅建立在集合论之上. 事实上绝大部分数学可以建立在集合论之上，但是这个集合论不是像弗雷格、罗素所设想的那样简单自然；原因是人们很快发现自由地、无批判地使用集合论会导致矛盾，因此对集合论的研究必须在设计出多种方案以排除这些矛盾的基础上小心翼翼地开展. 大致说来，当人们使用的集合“太大”时，例如试图描述一个包含所有事情的集合时，矛盾便出现了. 本书中我们用以下方法来避免这些矛盾：在我们讨论的范围内，固定某个集合或空间 X，且仅考虑那些元素取自 X 中的元素的集合，或元素取自 X 的子集的集合(这种集合称为集簇)，或元素取自 X 的子集的集簇的集合(这种集合称为集族)，等等. 在前面的几章，通常假定 X 为全体实数.

本章我们描述一些后面要用到的集合论概念，所给出的论断不太严密，不讲求在集合论的固有基础上严格论证，但(希望)可被理解. 这里给出的描述和记号绝大部分与哈尔莫斯在他的书 Naive Set Theory[5]中所描述的集合论一致. 然而与本书的目标与风格相应，像自然数、有理数、函数等概念假设为原始的、已知的，而在哈尔莫斯的书中则可以根据集合论的概念来严格定义这些概念.

6

关于集合论的公理化讨论，建议读者参考萨比的书 Axiomatic Set Theory[14]或者凯利的书 General Topology[9]的附录.

自然数(正整数)在本书中极为重要，因此我们引入特殊记号 $\mathbf{N}$ 来表示自然数集. 同时我们承认数学归纳法及良序原理. 数学归纳法指的是，如果 $P(n)$是对每个自然数 n 都有定义的命题，那么$\{P(1)\ \&\ [P(n)\Rightarrow P(n+1)]\}\Rightarrow(n)P(n)$. 良序原理则断言自然数集 $\mathbf{N}$ 的每一个非空子集都有一个最小元素.

集合论的基本概念是集合与集合的成员. 我们用符号“$\in$”表示后一个概念，用 $x\in A$ 来表示“x 是 A 的一个元素(或成员)”这一陈述. 一个集合完全由它的元素所确定，也就是说，如果对两个集合 A 和 B，$x\in A$ 当且仅当 $x\in B$，那么 $A=B$. 假定集合 A 中的每个元素都在集合 B 内，即 $x\in A\Rightarrow x\in B$；那么我们说 A 是 B 的一个子集或者 A 包含于 B，记为 $A\subset B$. 因此我们总是有 $A\subset A$，而且若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则 $A=B$. 谈到“包含”的概念，我们或许遇到比较遗憾的事情：英语短语“contained in”通常既可用来表达概念“$\in$”又可用来表达概念“$\subset$”，但这里我们仅用它来表达后一种概念. 当我们写“$x\notin A$”，意味着“非$(x\in A)$”，即 x 不是 A 的一个元素.

由于集合由它的元素所确定，所以确定一个集合最常用的方法之一就是列出它的所有元素，因此集合有以下定义：集合 A 是 X 中所有具有性质 P 的元素 x 的总体，简写为

$$A = \{x \in X : P(x)\}.$$

因此 $x\in A \Leftrightarrow [x\in X \ \&\ P(x)]$. 其中，当集合 X 熟知时，有时简写为⊖

[7]

$$A = \{x : P(x)\}.$$

我们通常考虑一个具有一些元素的集合，但为方便起见我们也考虑一个不具有任何元素的集合. 由于集合完全由它的元素所确定，因此这样的集合仅有一个，我们称它为**空集**，且记为 $\varnothing$. 若 A 是任意集合，那么 $\varnothing$ 的每个成员(实际上一个也没有)都是 A 的成员，因而 $\varnothing\subset A$. 因此，空集是任意集合的一个子集.

如果 x，y，z 是 X 的元素，我们定义集合 $\{x\}$ 为具有惟一元素 x 的集合；集合 $\{x, y\}$ 为恰有两个元素 x 和 y 的集合；集合 $\{x, y, z\}$ 为由元素 x，y，z 构成的集合；等等. 集合 $\{x\}$ 称为**单元集**或 x 的**单元素集**. 我们必须仔细区分 x 与 $\{x\}$. 例如，总是有 $x\in\{x\}$，而几乎没有 $x\in x$.

在集合 $\{x, y\}$ 中，x 对 y 没有任何优先关系，即 $\{x, y\}=\{y, x\}$. 因此，我们称 $\{x, y\}$ 为**无序对**. 通常也很有必要考虑**有序对** $\langle x, y\rangle$，这里我们区分第一个元素 x 与第二个元素 y. 因此 $\langle x, y\rangle=\langle a, b\rangle$ 当且仅当 $x=a$ 和 $y=b$，自然地，若 $x\neq y$ 则 $\langle x, y\rangle\neq\langle y, x\rangle$. 类似地，我们考虑有序三元组 $\langle x, y, z\rangle$，四元组 $\langle x, y, z, w\rangle$，等等，这里我们区分第一个元素，第二个元素，第三个元素……虽然可以通过无序对来定义有序对，三元组，等等(参见哈尔莫斯书中的定义)，但是这里并不这么做.

如果 X 和 Y 是两个集合，我们定义它们的**笛卡儿积**或**直积** $X\times Y$ 为其第一个元素属于 X、第二个元素属于 Y 的有序对 $\{\langle x, y\rangle\}$ 的总体构成的集合. 类似地，$X\times Y\times Z$ 是使得 $x\in X$，$y\in Y$，$z\in Z$ 的有序三元组 $\{\langle x, y, z\rangle\}$ 的总体构成的集合. 如果 X 为全体实数，那么 $X\times X$ 是全体有序实数对，如同我们从解析几何所知道的那样，它等价于平面上的点集. 我们有时将 $X\times X$ 写为 X^2，将 $X\times X\times X$ 写为 X^3，等等.

习题

1. 证明 $\{x: x\neq x\}=\varnothing$.
2. 证明：如果 $x\in\varnothing$，那么 x 是一头绿眼狮子.
3. 证明：一般说来 $X\times(Y\times Z)$ 与 $(X\times Y)\times Z$ 是不同的，但它们中的任一个都与 $X\times Y\times Z$ 有一个自然对应.

[8]

4. 证明良序集原理蕴涵数学归纳法原理. [考虑集合 $\{n\in \mathbf{N}$: 命题 $P(n)$ 是错的$\}$.]
5. 用数学归纳法来建立良序原理. [给定一正整数集 S，令 $P(n)$ 为命题"若 $n\in S$，则 S 有一个最小元素".]

1.2 函数

谈到从 X 到 Y 的函数 f，我们指的是这样的规则：对 X 中的每个 x 指定 Y 中的惟一元素 $f(x)$ 与之对应. $X\times Y$ 中所有形如 $\langle x, f(x)\rangle$ 的有序点对称为函数 f 的**图像**. $X\times Y$ 的子集 G

⊖ (直接或间接)给出对 X 的限制是必要的，否则，我们会遇到所谓的罗素悖论(参见 Suppes[14]，第 6 页).

是 X 上函数的图像，当且仅当对每个 $x\in X$，G 中有惟一的有序点对，其第一个元素是 x. 由于一个函数可以由它的图像所确定，因此许多人常常将函数的图像作为它的定义. 但即便如此或者用函数的原始概念都与我们的目标关系不大[⊖].

函数又称映射，我们将 f 是 X 到 Y 的函数这一事实记为

$$f:X\to Y.$$

集合 X 称为 f 的*定义域*. 函数 f 可以取到的值的集合 $\{y\in Y:(\exists x)[y=f(x)]\}$ 称为*值域*. 一般说来函数 f 的值域比 Y 小. 如果函数 f 的值域就是 Y，则称函数 f 是 Y **映上的**. (此时也可用另一个术语：f 是*满射的*.)

若 A 是 X 的子集，我们定义它在映射 f 下的像为集合 Y 中可以表示成 $y=f(x)$ 的元素的总体，其中 x 属于 A. 我们将像记为 $f[A]$

9

$$f[A]=\{y\in Y:(\exists x)[x\in A,\quad y=f(x)]\}.$$

因此 f 的值域为 $f[X]$，且 f 是 Y 映上的当且仅当 $Y=f[X]$.

比一个集合在映射 f 下的像更为重要的概念是一个集合在映射 f 下的逆像. 如果 B 是 Y 的一个子集，我们定义它在映射 f 下的**逆像** $f^{-1}[B]$ 为 X 中使得 $f(x)$ 属于 B 的元素集合；即

$$f^{-1}[B]=\{x\in X:f(x)\in B\}.$$

我们应注意 f 是映上 Y 的当且仅当 Y 的每个非空子集的逆像非空.

函数 f：$X\to Y$ 称为**一对一**的(或*单叶*，*单射*)，若等式 $f(x_1)=f(x_2)$ 仅当 $x_1=x_2$ 时成立. 从 X 到 Y 的一对一函数通常也称为 X 与 Y 间的一一对应(它们也被称为*双射*). 在这种情形下存在一个函数 g 使得对所有 x 和 y，有 $g(f(x))=x$ 和 $f(g(y))=y$. 函数 g 就称为 f 的逆，有时用记号 f^{-1} 来表示.

注意，如果把 g 表示为 f^{-1}，那么 $f^{-1}[E]$ 可看成是 E 在 f 的逆像或是 E 在 f^{-1} 的像. 好在根据我们规定的记号，这两个集合是相同的.

对于两个函数 f：$X\to Y$ 与 g：$Y\to Z$，我们通过令 $h(x)=g(f(x))$ 来定义一个新的函数 h：$X\to Z$. 函数 h 称为 g 的 f *复合函数*，记为 $g\circ f$. 对于函数 f：$X\to Y$ 与 X 的一个子集 A，我们定义一个新的函数 g：$A\to Y$，使得 $g(x)=f(x)$ 对所有 $x\in A$ 成立. 这个新函数 g 称为 f 在 A 的*限制*，有时写为 $f|A$. 在许多情形下都要仔细区分函数 g 与 f. 它们的值域不同，并且一个集合在映射 f 下的逆像与其在映射 g 下的逆像也是不同的.

在用有序对来定义函数之后，我们应该指出，反过来，也可通过函数来定义有序对. 一个有序对是一个定义在集合 $\{1,2\}$ 的函数. 类似地，一个**有限序列**或一个 n 元组，是一个定义在前 n 个自然数的函数，即集合 $\{i\in\mathbf{N}:i\leqslant n\}$. (我们称这样的集合为 $\mathbf{N}$ 的一个*片段*.)类似地，一个**无限序列**是定义在自然数集 $\mathbf{N}$ 的函数. 我们用术语“序列”来表示一个有限或无限序列. 若一个序列的值域在 X 内，则说该序列是取自 X 的序列或 X 的元素的序列. 通常在讨论序列的时候，我们将函数在 i 的值记为 x_i 且称这个值为该序列的第 i 个元素. 这与常用的函数记号

⊖ 函数与其图像的等价性仅当它是从一给定集 X 到另一集 Y 的函数时才是对的，而其他情况考虑这种等价性会遇到困难，例如在定义恒同函数($i(x)=x$ 对所有 x)的图像时. 因此在把函数当成原始概念正式处理时，必须有描述函数性质的公理，如 $(f=g)\Leftrightarrow(x)[f(x)=g(x)]$，正如同我们必须有能够构造函数的公理.

有所不同. 我们通常将有序 n 元组记为$\langle x_i\rangle_{i=1}^n$，而将无限序列记为$\langle x_i\rangle_{i=1}^\infty$. 在不会造成误解时，常简单记为$\langle x_i\rangle$. 序列$\langle x_i\rangle$的值域为集合$\{x_i\}$. 因此，有序 n 元组$\langle x_i\rangle_{i=1}^n$的值域是无序 n 元组$\{x_i\}_{i=1}^n$. 函数的这个记号是合理的，因为它与我们早先关于有序对与无序对、三元组等的记号是一致的.

10

若集合 A 是某个序列的值域，则称它为**可数**的. 若集合 A 是某个有限序列的值域则称它为**有限**的. 非有限的集合称为无限集. (许多作者把"可数"集的定义限定为无限可数的集合，而我们的定义却包含了可数集中的有限集.)这里用"可数无限"这个术语来描述无限可数集. 在1.6节，我们将再次讨论这个概念.

以下原理给出一个定义无限序列的有用方法：

递归定义原理 令 f 为集合 X 到其自身的一个函数，a 是 X 的一个元素，那么存在 X 中的惟一无限序列$\langle x_i\rangle$使得 $x_1=a$ 且对于每个 i，$x_{i+1}=f(x_i)$.

直观上看这种序列的存在性是很清楚的：定义 $x_1=a$，$x_2=f(a)$，$x_3=f(f(a))$，以此类推. 稍微正式一点的证明可如下给出：首先根据对 n 的归纳证明，对每个自然数 n 存在惟一的有限序列

$$x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \cdots, x_n^{(n)},$$

使得

$$x_1^{(n)} = a \quad 与 \quad x_{i+1}^{(n)} = f(x_i^{(n)}), \quad 1 \leqslant i < n.$$

由惟一性得出 $x_i^{(n)}=x_i^{(m)}$ 对于 $i\leqslant n\leqslant m$ 成立. 因此若定义 x_n 为 $x_n^{(n)}$，则有 $x_i^{(n)}=x_i$ 对 $i\leqslant n$ 成立，并且可看到序列$\langle x_i\rangle$满足原理的要求.

该原理可略推广为：对每个自然数 n，令 f_n 为 X^n 到 X 的函数且 $a\in X$，那么 X 中存在惟一的序列$\langle x_i\rangle$使得 $x_1=a$ 且 $x_{i+1}=f_i(x_1, \cdots, x_i)$.

与序列有关的一个重要概念是子序列. 为说明之，我们首先引入序列单调的概念，若从 $\mathbf{N}$ 到 $\mathbf{N}$ 的映射 g 满足$(i>j)\Rightarrow(g(i)>g(j))$，则称之为**单调**. 对于一个无限序列(即一个定义域是 $\mathbf{N}$ 的函数)f，我们称 h 是 f 的一个无限子序列，若存在一个从 $\mathbf{N}$ 到 $\mathbf{N}$ 的单调映射 g 使得 $h=f\circ g$. 如果将 f 写为$\langle f_i\rangle$，g 写为$\langle g_i\rangle$，那么就可以用$\langle f_{g_i}\rangle$来表示 $f\circ g$.

11

习题

6. 令 f 为非空空间 X 到 Y 的映射. 证明 f 是一对一的，当且仅当存在一个映射 g 使得 $g\circ f$ 是 X 上的恒同映射，即对所有 $x\in X$ 有 $g(f(x))=x$.
7. 令 f 为非空空间 X 到 Y 的映射. 证明 f 是映上的，若存在一个映射 g 使得 $f\circ g$ 是 Y 上的恒同映射，即对所有 $y\in Y$ 有 $f(g(y))=y$. (其逆命题见习题 21.)
8. 用数学归纳法证明文中所推广的递归定义原理.

1.3 并、交和补

固定一个集合 X，考虑它的所有子集组成的集合$\mathcal{P}(X)$. 我们对 X 的子集实施某些基本的集合论运算. 设 A 与 B 是 X 的子集，定义它们的交集 $A\cap B$ 为既属于 A 又属于 B 的所有元素. 因此

$$A \cap B = \{x : x \in A \ \& \ x \in B\}.$$

注意这个定义对 A 和 B 是对称的；即 $A \cap B = B \cap A$. 进一步有 $A \cap B \subset A$ 且 $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subset B$. 还有 $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$，因此把这个集合写为 $A \cap B \cap C$. 该集合是属于 A，B 与 C 的元素的总体.

我们定义两个集合 A 与 B 的并集 $A \cup B$ 为属于 A 或属于 B 的元素. 因此

$$A \cup B = \{x : x \in A \lor x \in B\}.$$

我们有

$$A \cup B = B \cup A$$
$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C = A \cup B \cup C$$
$$A \subset A \cup B$$
$$A = A \cup B \Leftrightarrow B \subset A.$$

还有关于并与交之间的关系，这些关系称为分配律：

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

12

在这些关系中，空集 $\varnothing$ 和空间 X 起着特殊的作用：

$$A \cup \varnothing = A, \quad A \cap \varnothing = \varnothing$$
$$A \cup X = X, \quad A \cap X = A.$$

如果 A 是 X 的一个子集，我们定义 A 的补集 $\widetilde{A}$（相对于 X）为 X 的不在 A 中的元素总体. 于是

$$\widetilde{A} = \{x \in X : x \notin A\}.$$

有时也将 $\widetilde{A}$ 写为 $\sim A$. 关于集合的补集，我们有

$$\widetilde{\varnothing} = X, \quad \widetilde{X} = \varnothing$$
$$\widetilde{\widetilde{A}} = A, \quad A \cup \widetilde{A} = X, \quad A \cap \widetilde{A} = \varnothing$$
$$A \subset B \Leftrightarrow \widetilde{B} \subset \widetilde{A}.$$

关于集合的并与交的补有两个特殊的运算律，称之为德摩根律：

$$\sim (A \cup B) = \widetilde{A} \cap \widetilde{B}$$
$$\sim (A \cap B) = \widetilde{A} \cup \widetilde{B}.$$

如果 A 和 B 是 X 的两个子集，我们定义差 $B \sim A$ 或者 A 在 B 中的相对补集为 B 中那些不属于 A 的元素，那么

$$B \sim A = \{x : x \in B \ \& \ x \notin A\}.$$

所以有 $B \sim A = B \cap \widetilde{A}$.

我们也用记号 $A \Delta B$ 来表示两个集合 A 与 B 有如下定义的对称差：

$$A \Delta B = (A \sim B) \cup (B \sim A).$$

两个集合的对称差为那些仅属于它们其中一个集合的点的总体.

若两个集合的交集为空集，称这两个集合是**不相交**的. 若一个集簇 $\mathcal{C}$ 中的任何两个集合都不相交，则称该集簇 $\mathcal{C}$ 为**不交集簇**或两两不相交的集簇.

将两个集合取并集(或交集)的过程重复多次，就可以得到有限集簇的并集(或交集). 因

13 此，可以给出任意集簇交集的定义：集簇$\mathcal{C}$的交集为 X 中那些属于$\mathcal{C}$的每个成员的元素的总体. 将这个交集记为$\bigcap_{A\in\mathcal{C}} A$ 或$\bigcap\{A: A\in\mathcal{C}\}$. 因此

$$\bigcap_{A\in\mathcal{C}} A = \{x \in X:(A)(A \in \mathcal{C} \Rightarrow x \in A)\}.$$

类似地，可以定义任意一个集簇的并为

$$\bigcup_{A\in\mathcal{C}} A = \{x \in X:(\exists A)(A \in \mathcal{C} \ \& \ x \in A)\}.$$

德摩根律对任意的交与并都成立：

$$\sim\left[\bigcup_{A\in\mathcal{C}} A\right] = \bigcap_{A\in\mathcal{C}} \widetilde{A}$$

$$\sim\left[\bigcap_{A\in\mathcal{C}} A\right] = \bigcup_{A\in\mathcal{C}} \widetilde{A}.$$

还有以下分配律：

$$B \cap \left[\bigcup_{A\in\mathcal{C}} A\right] = \bigcup_{A\in\mathcal{C}} (B \cap A)$$

$$B \cup \left[\bigcap_{A\in\mathcal{C}} A\right] = \bigcap_{A\in\mathcal{C}} (B \cup A).$$

根据定义，空集簇的并集为空集而空集簇的交集是空集.

至于 X 的子集的序列，我们指的是取值于$\mathcal{P}(X)$的序列，即从 $\mathbf{N}$(或 $\mathbf{N}$ 的一段)到$\mathcal{P}(X)$的映射. 若$\langle A_i\rangle$是 X 的子集构成的无限序列，将该序列的域的并写为$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. 因此

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \{x:(\exists i)(x \in A_i)\}.$$

类似地，若$\langle B_i\rangle_{i=1}^{n}$是 X 的子集构成的有限序列，将该序列的域的交写为$\bigcap_{i=1}^{n} B_i$. 因此

$$\bigcap_{i=1}^{n} B_i = B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_n.$$

14 鉴于序列的记号是如此便于使用，因而可将它推广至任意集簇. 为此引入加标的集簇的概念. X 的一个**加标子集**(或 X 的子集构成的集簇)是一个从指标集 Λ 上到 X(或 X 的子集)的一个函数. 若 Λ 为自然数集，则加标集合与序列的概念是一致的.

为与序列的记号一致，通常用 x_λ来取代 $x(\lambda)$，并将加标集合表示为$\{x_\lambda\}$或$\{x_\lambda: \lambda\in\Lambda\}$. 即说$\{x_\lambda\}$被 Λ 加标. 定义一个加标集合的并与交为用来定义该加标集的函数的值域的并与交. 因此有

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = \{x \in X:(\exists\lambda)(\lambda \in \Lambda \ \& \ x \in A_\lambda)\}$$

与

$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = \{x \in X:(\lambda)(\lambda \in \Lambda \Rightarrow x \in A_\lambda)\}.$$

当 Λ 为自然数集 **N** 时，我们有

$$\bigcap_{i\in N} A_i = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i,$$

类似的关系式对取并运算也成立.

若 f 是将 X 映入 Y 的函数，$\{A_\lambda\}$ 是 X 的子集构成的集簇，那么

$$f\left[\bigcup_\lambda A_\lambda\right] = \bigcup_\lambda f[A_\lambda],$$

但我们仅可得出

$$f\left[\bigcap_\lambda A_\lambda\right] \subset \bigcap_\lambda f[A_\lambda].$$

至于逆像，对于 Y 的子集构成的集簇 $\{B_\lambda\}$ 以下等式成立：

$$f^{-1}\left[\bigcup_\lambda B_\lambda\right] = \bigcup_\lambda f^{-1}[B_\lambda]$$

$$f^{-1}\left[\bigcap_\lambda B_\lambda\right] = \bigcap_\lambda f^{-1}[B_\lambda]$$

且对 $B\subset Y$ 有

$$f^{-1}[\widetilde{B}] = \sim f^{-1}[B]$$

对 $A\subset X$ 且 $B\subset Y$，有

$$f[f^{-1}[B]] \subset B$$

与

$$f^{-1}[f[A]] \supset A.$$

习题

9. 证明 $A\subset B \Leftrightarrow A\cap B=A \Leftrightarrow A\cup B=B$.

10. 证明分配律.

11. 证明 $A\subset B \Leftrightarrow \widetilde{B}\subset\widetilde{A}$.

12. 证明

   a. $A\Delta B=B\Delta A$ 和 $A\Delta(B\Delta C)=(A\Delta B)\Delta C$.

   b. $A\Delta B=\varnothing \Leftrightarrow A=B$.

   c. $A\Delta B=X \Leftrightarrow A=\widetilde{B}$.

   d. $A\Delta\varnothing=A$ 和 $A\Delta X=\widetilde{A}$.

   e. $(A\Delta B)\cap E=(A\cap E)\Delta(B\cap E)$.

13. 证明德摩根律(对任意的交集与并集).

14. 证明

$$B\cap\left[\bigcup_{A\in e} A\right] = \bigcup_{A\in e}(B\cap A).$$

15. 证明：若$\mathcal{A}$与$\mathcal{B}$为两个集簇，那么

$$[\bigcup\{A:A\in\mathcal{A}\}]\cap[\bigcup\{B:B\in\mathcal{B}\}]=\bigcup\{A\cap B:\langle A,B\rangle\in\mathcal{A}\times\mathcal{B}\}.$$

16. 证明

a. $f[\bigcup A_\lambda]=\bigcup f[A_\lambda]$.

b. $f[\bigcap A_\lambda]\subset\bigcap f[A_\lambda]$.

c. 给出一个例子使得

$$f[\bigcap A_\lambda]\neq\bigcap f[A_\lambda].$$

17. 证明

a. $f^{-1}[\bigcup B_\lambda]=\bigcup f^{-1}[B_\lambda]$.

b. $f^{-1}[\bigcap B_\lambda]=\bigcap f^{-1}[B_\lambda]$.

c. $f^{-1}[\widetilde{B}]=\sim f^{-1}[B]$，$B\subset Y$.

18. a. 证明：若 f 将 X 映入 Y 且 $A\subset X$，$B\subset Y$，那么

$$f[f^{-1}[B]]\subset B$$

与

$$f^{-1}[f[A]]\supset A.$$

15~16

b. 给出一个例子说明等式不一定成立.

c. 证明：若 f 将 X 映入 Y 且 $B\subset Y$，那么

$$f[f^{-1}[B]]=B.$$

1.4 集合的代数

由 X 的子集构成的集簇$\mathcal{A}$称为一个集合的**代数**或**布尔代数**. 若它满足以下三个条件：(i)只要A 与 B 属于$\mathcal{A}$就有 $A\cup B$ 属于$\mathcal{A}$；(ii)只要 A 属于$\mathcal{A}$就有 A 的补 $\widetilde{A}$ 属于$\mathcal{A}$；根据德摩根律我们有，(iii)只要 A 与 B 属于$\mathcal{A}$就有 $A\cap B$ 属于$\mathcal{A}$. 根据德摩根律还有：若 X 子集的集簇$\mathcal{A}$满足(ii)与(iii)，它也满足(i). 因此它是一个布尔代数. 通过一次取两个集合的并集，我们看到若 A_1，…，A_n 属于$\mathcal{A}$，则 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$ 也属于$\mathcal{A}$. 同样地，$A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$ 也属于$\mathcal{A}$.

我们将发现以下几个关于集合代数的命题是有用的. 首先是：

1. 命题 *给定 X 子集的任何集簇$\mathcal{C}$，存在包含$\mathcal{C}$的最小代数$\mathcal{A}$；即存在一个代数$\mathcal{A}$包含$\mathcal{C}$且对每一个包含$\mathcal{C}$的代数$\mathcal{B}$，都有$\mathcal{B}$包含$\mathcal{A}$.*

证明 令$\mathcal{F}$为包含$\mathcal{C}$的所有代数(X 的子集)构成的集族. 令$\mathcal{A}=\bigcap\{\mathcal{B}:\mathcal{B}\in\mathcal{F}\}$. 由于$\mathcal{F}$中的每个$\mathcal{B}$包含$\mathcal{C}$，因此$\mathcal{C}$是$\mathcal{A}$的一个子簇. 进一步地，$\mathcal{A}$是一个代数. 若 A 与 B 属于$\mathcal{A}$，那么对于每个$\mathcal{B}\in\mathcal{F}$有 $A\in\mathcal{B}$、$B\in\mathcal{B}$. 由于$\mathcal{B}$是一个代数，$A\cup B$ 属于$\mathcal{B}$. 因为该关系式对每个 $\mathcal{B}\in\mathcal{F}$ 都成立. 我们有 $A\cup B$ 属于$\bigcap\{\mathcal{B}:\mathcal{B}\in\mathcal{F}\}$. 类似地，若 $A\in\mathcal{A}$ 那么 $\widetilde{A}\in\mathcal{A}$. 根据$\mathcal{A}$的定义可以得出，若$\mathcal{B}$是一个包含$\mathcal{C}$的代数，则$\mathcal{B}\supset\mathcal{A}$. ■

包含$\mathcal{C}$的最小代数称为由$\mathcal{C}$生成的代数.

2. 命题 令$\mathcal{A}$为 X 的子集的代数且$\langle A_i \rangle$为$\mathcal{A}$中集合的序列，那么存在$\mathcal{A}$中的集合序列$\langle B_i \rangle$使得当 $n \neq m$，$B_n \cap B_m = \varnothing$且

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i.$$

17

证明 由于当$\langle A_i \rangle$为有限时命题是平凡的，所以假定$\langle A_i \rangle$为无限序列. 设 $B_1 = A_1$，且对每个自然数 $n>1$ 定义

$$\begin{aligned} B_n &= A_n \sim [A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{n-1}] \\ &= A_n \cap \widetilde{A}_1 \cap \widetilde{A}_2 \cap \cdots \cap \widetilde{A}_{n-1}. \end{aligned}$$

由于$\mathcal{A}$中的集合的补集和交集仍在$\mathcal{A}$中，因而有每个 $B_n \in \mathcal{A}$，还有 $B_n \subset A_n$. 令 B_n 和 B_m 为如此两个集合，并假定 $m<n$，那么 $B_m \subset A_m$，因而

$$\begin{aligned} B_m \cap B_n &\subset A_m \cap B_n \\ &= A_m \cap A_n \cap \cdots \cap \widetilde{A}_m \cap \cdots \\ &= (A_m \cap \widetilde{A}_m) \cap \cdots \\ &= \varnothing \cap \cdots \\ &= \varnothing. \end{aligned}$$

因为 $B_i \subset A_i$，所以

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i.$$

令 $x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. 那么 x 必须至少属于这些 A_i 中的一个. 令 n 为使得 $x \in A_i$ 的最小的 i，那么 $x \in B_n$，且 $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$. 因此

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \supset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,$$

因而我们有

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$ ■

一个集代数$\mathcal{A}$称为一个 **σ 代数**，或一个**博雷尔域**，若$\mathcal{A}$中的每个可数集簇的并集仍属于$\mathcal{A}$. 即，若$\langle A_i \rangle$是一个集列，那么$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ 仍在$\mathcal{A}$中. 根据德摩根律，$\mathcal{A}$中的可数集簇的交集仍属于$\mathcal{A}$. 对命题 1 的证明稍作修改我们得到以下命题：

18

3. 命题 给定 X 的子集的任何集簇$\mathcal{C}$，存在包含$\mathcal{C}$的最小 σ 代数；即存在一个 σ 代数$\mathcal{A}$包含$\mathcal{C}$，使得对每一个包含$\mathcal{C}$的 σ 代数$\mathcal{B}$都有$\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$.

包含$\mathcal{C}$的最小 σ 代数称为由$\mathcal{C}$生成的 σ 代数.

习题

19. a. 证明命题 3.

b. 若$\mathcal{A}$是由$\mathcal{C}$生成的代数，那么$\mathcal{A}$和$\mathcal{C}$生成相同的σ代数.

20. 令$\mathcal{C}$是一个集簇且E是由$\mathcal{C}$生成的σ代数的一个元素，那么存在一个可数子集簇$\mathcal{C}_0\subset\mathcal{C}$，使得$E$是由$\mathcal{C}_0$生成的$\sigma$代数$\mathcal{A}_0$的一个元素.［提示：令$\mathcal{A}'$为所有由$\mathcal{C}$的可数子集簇生成的$\sigma$代数的并，那么$\mathcal{A}'\supset\mathcal{A}$.］

1.5　选择公理与无限直积

集合论的一个重要公理即所谓的选择公理. 它与公理集合论的其他公理相比显得不那么初等. 但我们知道选择公理是独立于它们的. 许多数学家喜欢它的非常明确的应用与推论，事实上关于选择公理的应用与推论已有很多重要的研究成果. 但在这里我们对它应用的探讨是不太正式的. 下面给出该公理：

选择公理　*令$\mathcal{C}$为任意非空的集簇，那么有定义在$\mathcal{C}$的函数F，其将$\mathcal{C}$中的每个集合A映到A的一个元素$F(A)$.*

函数F称为选择函数，它的存在性可看作对$\mathcal{C}$的每一个集合A选出A中的一个元素. 无疑，当集簇$\mathcal{C}$为有限个成员时，这样做没有困难，而当集簇$\mathcal{C}$为无限时，我们就需要选择公理了. 若集簇不相交，我们可认为选择公理断言要选出这么一种“议会”，其成员来自$\mathcal{C}$中的每个集合的可能性.

19

令$\mathcal{C}=\{X_\lambda\}$为被指标$\Lambda$标记的集簇. 我们定义**直积**

$$\bigtimes_\lambda X_\lambda$$

为由所有被标记的具有性质$x_\lambda\in X_\lambda$的集合组成的集簇$\{x_\lambda\}$. 若$\Lambda=\{1,2\}$，我们有早先定义的两个集合X_1与X_2的直积$X_1\times X_2$. 若$z=\{x_\lambda\}$是$\bigtimes_\lambda X_\lambda$的一个元素，则称$x_\lambda$为$z$的第$\lambda$重坐标.

若某个X_λ为空集，那么$\bigtimes_\lambda X_\lambda$也是空集. 选择公理等价于它的逆命题：若每个$X_\lambda$非空，那么$\bigtimes_\lambda X_\lambda$非空. 为此贝特朗・罗素倾向于将选择公理称为乘积公理.

习题

21. 令f：$X\to Y$到Y映上的，那么存在一个映射g：$Y\to X$使得$f\circ g$是Y上的恒同映射.［将选择公理运用于集簇$\{A$：$(\exists y\in Y)$满足$A=f^{-1}[\{y\}]\}$.］

1.6　可数集

在1.2节中，若一个集合是某个序列的值域，则定义它是可数的. 如果它是某个有限序列的值域，我们就得到有限集，但一个无限序列的值域也可能有限. 事实上每个非空有限集都是一个无限序列的值域. 例如，有限集$\{x_1, \cdots, x_n\}$是无限序列$\{x_i\}$当$i>n$，$x_i=x_n$的值域. 因此一个集合是可数无限的，若它是某个无限序列的值域，但不是任何有限序列的值域. 自然数集$\mathbf{N}$就是一个可数无限集合的例子.

在进一步讨论之前，我们最好先来讨论一下空集．空集不是任何序列的值域(除非我们承认有零项序列)．然而，为方便起见，在给出有限集与可数集的定义时，我们约定空集既是有限的又是可数的．因此： [20]

定义 一个集合称为**有限的**，若它或者是空集或者是某个有限序列的值域．一个集合称为**可数的**(或可列举的)，若它不是空集就是某个序列的值域．

由上面这个定义可立刻得出任何可数集的像是可数的，即可数定义域上任何函数的值域可数，类似的结论对有限集也成立．

数学上通常会给出稍微不同但等价的定义，该定义基于一一对应的概念．我们首先注意到任何可与有限集一一对应的集合是有限的．任何能与可数集一一对应的集合必须是可数的．由于自然数集 **N** 是可数集但非有限集，那么任何可与自然数集 **N** 一一对应的集合是可数无限的．习惯上常用这个性质来定义可数无限集．因此为表明我们的定义与这个通常的定义等价，我们必须证明：若无限集 E 是某个序列 $\langle x_n \rangle$ 的值域，则它可以与自然数集 **N** 建立一一对应．为此我们递归地定义一个从 **N** 到 **N** 的函数 φ：令 $\varphi(1)=1$，且定义 $\varphi(n+1)$ 为使得 $x_m \neq x_i$ 对所有 $i \leqslant \varphi(n)$ 成立的最小 m．因为 E 是无限的，所以这样的 m 总是存在的，且根据自然数集 **N** 的良序原理，最小的 m 必定存在．因此 $n \to x_{\varphi(n)}$ 是 **N** 与 E 间的一一对应．这样就证明了一个集合是可数无限当且仅当它可以与自然数集 **N** 建立一一对应关系．现在我们可以证明关于可数集的一些简单命题：

4. 命题 可数集的每个子集可数．

证明 令 $E=\{x_n\}$ 为可数集，A 为 E 的一个子集．若 A 为空集，则根据定义 A 是可数的．若 A 非空，选择 A 中的元素 x．用以下方式定义一个新序列 $\langle y_n \rangle$：若 $x_n \in A$，$y_n = x_n$；若 $x_n \notin A$，$y_n = x$，那么 A 是 $\langle y_n \rangle$ 的值域，因此可数． ■

5. 命题 令 A 为可数集，那么 A 的所有有限序列构成的集可数． [21]

证明 由于 A 是可数的，它就可与自然数集 **N** 的一个子集一一对应．因此仅需证明自然数的所有有限序列构成的集 S 可数．令 $\langle 2, 3, 5, 7, 11, \cdots, p_k, \cdots \rangle$ 为素数序列，那么 **N** 中的每个 n 有惟一的素因数分解[⊖] $n=2^{x_1} 3^{x_2} \cdots p_k^{x_k}$，其中 $x_i \in \mathbf{N}_0 = \mathbf{N} \cup \{0\}$ 且 $x_k > 0$．令 f 为定义在 **N** 上的函数，它将每个自然数 n 映入 $\mathbf{N}_0$ 中的有限序列 $\langle x_1, \cdots, x_k \rangle$，那么 S 就是 f 值域的一个子集．因此根据命题 4，S 是可数的． ■

6. 命题 有理数集是可数的．

7. 命题 可数集的并是可数的．

证明 令 $\mathcal{C}$ 为可数集构成的可数集簇．若 $\mathcal{C}$ 中的所有集合是空集，那么并集就是空集并是可数集．因此我们可以假定 $\mathcal{C}$ 的集合非空．所以 $\mathcal{C}$ 是无限序列 $\langle A_n \rangle_{n=1}^{\infty}$ 的值域，且每个 A_n 是无限序列 $\langle x_{nm} \rangle_{m=1}^{\infty}$ 的值域．而将 $\langle n, m \rangle$ 映到 x_{nm} 的映射是从有序的自然数对到集簇 $\mathcal{C}$ 的并的映上映射．由于自然数对是可数的，所以集簇 $\mathcal{C}$ 的并必须也是可数的． ■

⊖ 除 1 外；我们约定写法 $1=2^0$．

习题

22. 证明有限集的每个子集都是有限集.
23. 用命题 4 和命题 5 证明命题 6. [提示：映射

$$\langle p,q,1\rangle \to p/q$$
$$\langle p,q,2\rangle \to -p/q$$
$$\langle 1,1,3\rangle \to 0$$

22

是一个值域为有理数集、定义域为 N 的有限序列集的一个子集.]
24. 证明值域为{0，1}的无限序列集合 E 是不可数的. [提示：令 f 为从 N 到 E 的函数，那么 $f(v)$是序列$\langle a_{vn}\rangle_{n=1}^{\infty}$. 设 $b_v=1-a_{vv}$，那么$\langle b_n\rangle$仍然是值域为{0，1}的序列，且对每个 $v\in \mathbf{N}$ 我们有$\langle b_n\rangle\neq\langle a_{vn}\rangle$. 这个证明方法即为著名的康托尔对角线法.]
25. 令 f 为 X 到由 X 的子集构成的集簇$\mathcal{P}(X)$的映射，那么存在一个集合 $E\subset X$，它不在 f 的值域中. [提示：令 $E=\{x: x\notin f(x)\}$.]
26. 用选择公理与广义递归定义原理证明每个无限集 X 包含一个可数无限子集.

1.7 关系与等价

给定 x 与 y，它们之间可以有许多种方式相"关联"，例如 $x=y$，$x\in y$，$x\subset y$，或对于 x，y 为数的情形 $x<y$. 一般我们说 R 表示一个关系，给定 x 和 y，或者 x 对 y 有关系 R(写为 $x\mathrm{R}y$)或者 x 对 y 没有关系 R. 若 $x\mathrm{R}y$ 蕴涵 $x\in X$ 与 $y\in X$，则称 R 是 X 上的一个关系. 因此，我们定义 R 的图像为集合$\{\langle x, y\rangle: x\mathrm{R}y\}$. 由于若$(x\mathrm{R}y)\Leftrightarrow(x\mathrm{S}y)$，我们考虑两个关系 R 与 S 相同，所以每个集合 X 上的关系被它的图像惟一确定，反过来 $X\times X$ 的每个子集是 X 上某个关系的图像. 因此将 X 上的关系等同于它的图像且定义关系为 $X\times X$ 的子集. 在许多集合论的形式化处理中，一般来说一个关系可简单地定义为有序对的子集[⊖].

若一个关系 R 对所有 X 中的 x，y 和 z，满足 $x\mathrm{R}y$ 和 $y\mathrm{R}z$ 都蕴涵 $x\mathrm{R}z$，我们称它为 X 上**传递的**. 因此=和<是实数集上的传递关系. 若一个关系 R 对所有 X 中的 x 和 y 满足 $x\mathrm{R}y$ 蕴涵 $y\mathrm{R}x$，则称它为 X 上**对称的**. 若一个关系 R 对所有 $x\in X$ 满足 $x\mathrm{R}x$，则称它是 X 上**自反的**.

23

一个 X 上的传递、对称、自反的关系称为 X 上的**等价关系**或简单地说 X 上的一个**等价**. 假定≡是 X 上的一个等价关系. 对给定的 $x\in X$，令 E_x为所有与 x 等价的元素，即 $E_x=\{y: y\equiv x\}$. 若 y 与 z 都在E_x，那么 $y\equiv x$ 且 $z\equiv x$，根据对称性和传递性有 $z\equiv y$. 因此 E_x的任意两个元素等价. 若 $y\in E_x$且 $z\equiv y$，那么 $z\equiv y$ 且 $y\equiv x$，这就得到 $z\equiv x$，因而 $z\in E_x$. 因此 X 中任何与 E_x的元素等价的元素，其自身也是 E_x的一个元素. 所以，对 X 的任意两个元素 x 和 y，集合 E_x与 E_y要么相同(若 $x\equiv y$)要么不相交(若 $x\not\equiv y$). 集簇$\{E_x: x\in X\}$中的集合称为 X 在≡下的**等价集**或**等价类**. 因此 X 是其在≡下的等价类的不交并. 注意到 $x\in E_x$，因而没有空的等价类.

⊖ 参见 Suppes[14]，57 页，或 Halmos[5]，26 页. 然而，应该指出，这样的方法存在一个困难，=、∈和⊂不是关系. 为此我倾向于如 Kelley[9](260 页)的处理方法，在那里关系不必是有序对的集合.

在$\equiv$下的等价类的集合称为关于$\equiv$的商集. 有时记为$X/\equiv$. 映射$x\to E_x$是X到$X/\equiv$映上的自然映射.

集合X上的二元运算是一个从$X\times X$到X的映射. 若$x\equiv x'$和$y\equiv y'$蕴涵$(x+y)\equiv(x'+y')$我们说等价关系$\equiv$与二元运算"+"相容. 在这种情形下"+"定义了商集$Q=X/\equiv$上的一个运算：若E与F属于Q，选取$x\in E$，$y\in F$，定义$E+F$为$E_{(x+y)}$. 由于$\equiv$是一个等价关系，所以$E+F$仅依赖于E和F而与x和y的选取无关.

想要了解更多细节的读者可以查询 Birkhoff and MacLane[2]，145 页.

习题

27. 证明如上定义的$F+G$仅依赖于F与G.
28. 令X为加法运算+的阿贝尔群，那么$\equiv$与+相容当且仅当$x\equiv x'$蕴涵$x+y\equiv x'+y$，因此诱导运算使商空间成为一个群.

1.8 偏序与极大值原理

集合X上的一个关系R称为*反对称的*，若对于所有x和y，$x\text{R}y$和$y\text{R}x$蕴涵$x=y$. 集合X上的一个关系$\prec$说为**偏序**(或偏序X)若它在X上传递且反对称. 因此$\leqslant$是实数上的一个偏序且$\subset$是$\mathcal{P}(X)$上的一个偏序. 集合X上的一个偏序$\prec$称为一个*线性序*(或*简单序*)若对X的两个元素x和y，不是有$x\prec y$就是有$y\prec x$. 因此$\leqslant$是实数上的线性序，而$\subset$不是$\mathcal{P}(X)$上的线性序.

24

若$\prec$是X上的一个偏序且$a\prec b$，我们常说a*先于*b或b*跟随*a. 有时会说a比b小或b比a大. 若$E\subset X$，我们说一个元素$a\in E$是E的*第一元*或E的最小元，只要$x\in E$且$x\neq a$就有$a\prec x$. 类似地可定义最后(最大)元. 一个元素称为*极小元*，若不存在$x\in E$使得$x\neq a$且$x\prec a$，类似地可定义极大元. 应该注意到，若一个集合有最小元，那么这个元素就是极小元. 若$\prec$是线性序，则极小元是一个最小元，一般来说，可能会有非最小元的极小元.

我们关于偏序的定义未曾断言$x\prec x$的可能性或必要性. 若对所有的x有$x\prec x$，则称$\prec$*自反偏序*. 若从未有$x\prec x$，那么$\prec$称为*严格偏序*. 因此$<$是实数上的严格偏序，$\leqslant$是实数上的自反偏序. 对任意偏序$\prec$存在惟一的严格偏序与惟一的自反偏序使得对所有满足$x\neq y$的$\langle x, y\rangle$与$\prec$一致. 若$\prec$是任何偏序，我们用$\preccurlyeq$表示相伴随的自反偏序.

以下原理等价于选择公理且更便于经常应用. 该等价关系的证明与相关原理的讨论，参阅 Suppes[14]，第 8 章，或 Kelley[9]，31-36 页.

豪斯多夫极大值原理 *令$\prec$为集合X上的偏序，那么存在X的一个极大线性有序子集S，即X的子集S具有线性序$\prec$和以下性质：若$S\subset T\subset X$且T在$\prec$下是线性序，那么$S=T$.*

习题

29. 令$\prec$为X上的一个偏序，那么X上存在一个惟一的严格偏序$<$和一个惟一的自反偏序$\leqslant$，使得对于$x\neq y$有$x\prec y\Leftrightarrow x<y\Leftrightarrow x\leqslant y$.

25

30. 给出一个有惟一的极小元但没有最小元的偏序集的例子.

1.9　良序与可数序数

集合 X 上的一个严格线性序 $<$ 称为 X 的良序或称为将 X 良序化，若 X 的每个非空子集含有第一元．因此，若我们取 $X=\mathbf{N}$，且 $<$ 指的是小于，那么 $\mathbf{N}$ 在关系 $<$ 下是一个良序集．另一方面，实数集合 $\mathbf{R}$ 在关系“小于”下不是良序集．以下原理显然蕴涵了选择公理并且能够证明它与选择公理等价(见 Suppes[14]，第 8 章，或 Kelley[9]，31-36 页)．

良序原理　*每个集合 X 都可被良序化，即存在一个关系 $<$ 可将 X 良序化．*

8. 命题　*存在一个不可数集 X 被关系 $<$ 用以下方式良序化：*

i. 存在 X 的一个最后元 Ω．

ii. 若 $x\in X$ 且 $x\neq\Omega$，那么集合 $\{y\in X：y<x\}$ 是可数的．

证明　令 Y 为任意不可数集，比如说习题 23 所给出的一个例子．根据良序原理，存在 Y 上的一个良序 $<$．若 Y 没有一个最后元，取不属于 Y 的元素 α，用 $Y\cup\{\alpha\}$ 代替 Y，通过令所有的 $y\in Y$ 有 $y<\alpha$ 将关系 $<$ 延拓到新的 Y．因此这个新的 Y 就有一个最后元且在 $<$ 下是良序的．Y 中使得集合 $\{x\in Y：x<y\}$ 不可数的 y 的全体所构成的集合是非空的．这是因为它包含了 Y 的最后元．令 Ω 为该集合的最小元，并令 $X=\{x\in Y：x<\Omega$ 或 $x=\Omega\}$．那么集合 X 就是我们所要的集合．　■

上面命题中给出的良序集 X 在构造例子过程中十分有用．可以证明它在以下意义下是惟一的：若 Y 是任何具有相同性质的良序集，那么 X 与 Y 间存在一个序保持的一一对应．X 中的最后元 Ω 称为第一不可数序数，X 称为小于或等于第一不可数序数的序数集．元素 $x<\Omega$ 称为可数序数．若 $\{y：y<x\}$ 有限，则称 x 是一个有限序数．若 ω 是第一非有限序数，则 $\{x：x<\omega\}$ 是有限序数集，并且作为一个有序集，它等价于正整数集 $\mathbf{N}$．

[26]

习题

31. a. 证明一个良序集的任意子集良序．

　b. 若 $<$ 是一个 X 上的偏序，且 X 的每个非空子集有一最小元，那么 $<$ 是一个线性序进而是一个良序．

32. 令 Y 为小于第一不可数序数的序数集合；即 $Y=\{x\in X：x<\Omega\}$．证明 Y 的每个可数子集 E 有一个属于 Y 的上界进而有上确界．(一个元素 b 称为 E 的一个上界，若 $x\leqslant b$ 对每个 $x\in E$ 都成立；若对 E 的每个上界 b^* 有 $b\leqslant b^*$，则说 b 是 E 的上确界．)

33. 良序集 X 的子集 S 称为一个节，若

$$S=\{x\in X:x<y\}$$

对某个 $y\in X$ 成立或若 $S=X$．证明节的并仍然是一个节．

34. 令 X 和 Y 为两个良序集．从 X 到 Y 的函数 f 称为一个后继保持映射，若对每个 $x\in X$ 元素 $f(x)$ 是 Y 中不属于 $f[\{z：z<x\}]$ 的第一元．

　a. 证明至多存在一个从 X 到 Y 的后继保持映射．

　b. 证明一个后继保持映射的值域是一个节．

c. 证明：若 f 是一个后继保持映射，那么 f 是一对一的序保持映射并且 f^{-1} 也是序保持映射.

d. 证明：若 f 是一个从 X 到 Y 的后继保持映射，那么 f 对一个节的限制也是后继保持的.

e. 若 X 和 Y 是良序集，那么存在一个从它们中间一个映上另一个的节的后继保持映射；即或者存在一个从 X 映上 Y 的节的后继保持映射，或者存在一个从 Y 映上 X 的节的后继保持映射. [提示：考虑 X 上那些存在一个后继保持映射将其映入 Y 的那些节簇. 证明存在一个后继保持映射 f 将节簇的并 S 映入 Y 的映射 $S=X$ 或者 $f[S]=Y$.]

f. 证明命题 8 中的良序集 X 在同构意义下是惟一的.

27

第一部分

实变函数论

第2章 实 数 系

2.1 实数的公理

我们假定读者已对实数集 $\mathbf{R}$ 与实数的基本性质较为熟悉，这些内容通常出现在大学分析课程中. 本章的目的是对那些要用到的结果进行回顾与系统化.

切入实数这一主题的一个途径是把它们定义为有理数的戴德金分割，而有理数则可以通过自然数来定义. 这就给出了实数的一个优美的构造方法，而无需更为基本的概念与集合论. 但此处我们并不关心实数的构造，而仅把它们当成已知的接受下来. 这里列出了一系列有关它们的公理. 我们要用到的性质都是这些公理的推论. 事实上，这些公理较完全地刻画了实数.

假定实数集 $\mathbf{R}$、正实数集 P 与从 $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ 到 $\mathbf{R}$ 的算符“$+$”和“$\cdot$”都是给定的，并且假设这些数集和算符满足以下三组公理. 第一组描述实数的代数性质，第二组描述实数的序性质，第三组包含上确界公理.

A. 域公理 对于所有实数 x，y 和 z，我们有：

A1. $x+y=y+x$.

A2. $(x+y)+z=x+(y+z)$.

31

A3. 存在 $0\in\mathbf{R}$ 使得 $x+0=x$ 对于所有 $x\in\mathbf{R}$ 成立.

A4. 对于每个 $x\in\mathbf{R}$ 存在一个 $w\in\mathbf{R}$ 使得 $x+w=0$.

A5. $xy=yx$.

A6. $(xy)z=x(yz)$.

A7. 存在 $1\in\mathbf{R}$ 使得 $1\neq0$ 且 $x\cdot1=x$ 对于所有 $x\in\mathbf{R}$ 成立.

A8. 对于每个不等于 0 的 $x\in\mathbf{R}$，存在 $w\in\mathbf{R}$ 使得 $xw=1$.

A9. $x(y+z)=xy+xz$.

任何满足这些公理的集合称为一个域(在$+$和$\cdot$下). 从 A1 我们知道 A3 中的 0 是惟一的. 事实上在 A4、A7 与 A8 的叙述中已假定了 0 是惟一的. A4 中的 w 是惟一的并将它记为“$-x$”. 我们定义 $x-y$(x 减去 y)为 $x+(-y)$. A7 中的 1 是惟一的. 可以证明 A8 中的 w 是惟一的且将它记为“x^{-1}”. 若有一个域，即任何满足从 A1 到 A9 的系统，我们可以对它实施所有初等代数的运算，其中包括解线性方程组. 我们将使用这些公理的各种结果而不作特别说明.

实数具有的第二类性质与实数有序这一事实有关. 我们可以用公理化的办法来处理概念 a 小于 b，但是将正实数作为原始的记号来使用更为方便. 因此，第二组公理具有以下形式：

B. 序公理 正实数的子集 P 满足以下公理：

B1. $(x,\ y\in P)\Rightarrow x+y\in P$.

B2. $(x,\ y\in P)\Rightarrow xy\in P$.

B3. $(x\in P)\Rightarrow -x\notin P$.

B4. $(x\in\mathbf{R})\Rightarrow(x=0)$或者$(x\in P)$或者$(-x\in P)$.

任何满足A组与B组公理的系统称为一个**有序域**，因此实数全体是一个有序域. 有序域的另一个例子是有理数全体.

在一个有序域中，我们定义概念$x<y$为$y-x\in P$. 用记号“$x\leqslant y$”来表示“$x<y$或$x=y$”. 根据<，公理B1等价于

32

$$(x<y\ \&\ z<w)\Rightarrow x+z<y+w,$$

公理B2等价于

$$(0<x<y\ \&\ 0<z<w)\Rightarrow xz<yw.$$

公理B3断言一个数不可能既大于又小于另一个数，而B4说的是两个不同的数必有一个较大些. 由于公理B1蕴涵关系<是传递的，可看到在<关系下实数是线性序. 除了在下一节开始的讨论外，我们将这两组公理的推论都视为当然，且在不明确指出的情形下使用它们. 对有序域的其余性质感兴趣的读者请参阅Birkhoff and MacLane[2].

第三组公理仅有一个公理，但该公理使实数区别于其他有序域. 与对前两组公理的推论所采取的随意性态度不同，我们要明确讨论它的用途. 在叙述该公理之前，先介绍一些术语：若S是一个实数集，对于每个$x\in S$我们有$x\leqslant b$，就说b是S的一个**上界**. 有时我们将这一事实表示为$S\leqslant b$. 一个数c称为S的**上确界**，若它是S的一个上界且对S的每个上界b都有$c\leqslant b$. 显然，上确界若存在则惟一. 这样关于实数的最后一个公理明确地保证了具有上界的集合的上确界的存在性.

C. 完备性公理 *每个具有上界的非空实数集S必有上确界.*

作为公理C的推论我们有以下命题：

1. 命题 *令L和U为$\mathbf{R}$的非空子集，满足$\mathbf{R}=L\cup U$，并且使得对于每个属于L的l与每个属于U的u有$l<u$，那么不是L有一个最大元就是U有一个最小元.*

我们将经常用$\sup S$或$\sup\limits_{x\in S}x$，某些时候也用$\sup\{x: x\in S\}$来表示S的上确界. 用类似的方式我们能够定义下界与下确界，并由公理C知道每个具有下界的实数集都有下确界. 用$\inf S$或$\inf\limits_{x\in S}x$来表示集合S的下确界. 注意$\inf\limits_{x\in S}x=-\sup\limits_{x\in S}-x$.

33

习题

1. 证明$1\in P$.
2. 用公理C证明实数集的每个具有下界的非空子集具有下确界.
3. 用公理C证明命题1.
4. 若x与y是两个实数，当$x\geqslant y$时定义$\max(x, y)$等于x，而当$y\geqslant x$时等于y. 我们常将$\max(x, y)$记为“$x\vee y$”. 类似地，我们定义$\min(x, y)$为x与y中较小的数，并将它记为“$x\wedge y$”. 证明
   a. $(x\wedge y)\wedge z=x\wedge(y\wedge z)$.
   b. $x\wedge y+x\vee y=x+y$.
   c. $(-x)\wedge(-y)=-(x\vee y)$.
   d. $x\vee y+z=(x+z)\vee(y+z)$.

e. $z(x\vee y)=(zx)\vee(zy)$，若 $z\geqslant 0$.

5. 若 $x\geqslant 0$ 定义 $|x|$ 为 x，若 $x<0$ 定义 $|x|$ 为 $-x$. 证明
   a. $|xy|=|x||y|$.
   b. $|x+y|\leqslant|x|+|y|$.
   c. $|x|=x\vee(-x)$.
   d. $x\vee y=\frac{1}{2}(x+y+|x-y|)$.
   e. 若 $-y\leqslant x\leqslant y$，则 $|x|\leqslant y$.

2.2 作为 R 的子集的自然数与有理数

我们已将采用自然数视为理所当然，并用它们来计数. 不过我们仍然认为 3 不仅是自然数而且还是实数. 事实上，我们不仅用记号 1 来表示第一个自然数也用它来表示公理 7 所给出的特殊实数. 人们可以尝试把实数 3 定义为 $1+1+1$，用“类似的”的方式还可以定义对应于任意自然数的实数. 运用现有的工具，我们能以更为精确的方式来做这件事情.

根据递归定义原理，存在一个如下定义的从自然数到实数的函数 φ：$\varphi(1)=1$，且 $\varphi(n+1)=\varphi(n)+1$(这里右边的 1 表示实数，而左边的 1 表示自然数). 我们将证明映射 φ 是一个从 **N** 到 **R** 的一一映射. 令 p 和 q 为两个不同的自然数，比如说 $p<q$，那么 $q=p+n$，且我们将根据对 n 的归纳证明 $\varphi(p)<\varphi(q)$. 对于 $n=1$ 有 $q=p+1$ 且 $\varphi(q)=\varphi(p)+1>\varphi(p)$. 而对一般的 n，我们有 $\varphi(p+n+1)=\varphi(p+n)+1>\varphi(p+n)$，因而 $\varphi(p+n)>\varphi(p)$ 蕴涵 $\varphi(p+n+1)>\varphi(p)$. 因此根据归纳，$\varphi(p+n)>\varphi(p)$，并且看到映射 φ 是一对一的. 还可以通过归纳证明 $\varphi(p+q)=\varphi(p)+\varphi(q)$ 与 $\varphi(pq)=\varphi(p)\varphi(q)$. 因此 φ 给出了自然数 **N** 与实数 **R** 的一个子集的一个一一对应，而且 φ 保持和、积与关系<. 严格说来，我们应该区别自然数 n 与它在 φ 的像 $\varphi(n)$，但这里不作区分：将 **N** 视为实数 **R** 的子集. 取两个自然数的差，可得到作为实数 **R** 子集的整数集，取两个整数的商能得到有理数. 由于讨论中我们没用到公理 C，所以同样的结论对任何有序域都成立. 因此我们已经证明了以下的命题：

[34]

2. 命题 *每个有序域包含与自然数集、整数集和有理数集同构的集合.*

运用公理 C，我们可以证明几个关于作为实数集的子集的整数集与有理数集的进一步事实. 以下定理是关于这些事实的最重要的定理之一，由于历史原因[⊖]我们称之为阿基米德公理：

3. 阿基米德公理 *给定任意实数 x，存在一个整数 n 使得 $x<n$.*

证明 若 $x<0$，取 $n=0$. 否则满足 $k\leqslant x$ 的整数 k 构成一非空集 S. 由于 S 有上界 x，根据公理 C 它有上确界 y. 因为 y 是 S 的上确界，所以 $y-\frac{1}{2}$ 不能为 S 的上界，因此存在一个 $k\in S$ 使得 $k>y-\frac{1}{2}$. 但 $k+1>y+\frac{1}{2}>y$，因而 $(k+1)\notin S$. 由于 $k+1$ 是不属于 S 的一个整数，根据 S 的定义，必须有 $k+1$ 大于 x. ■

[35]

4. 系 *任意两个实数之间必有有理数；即若 $x<y$，则存在一个有理数 r 使得 $x<r<y$.*

⊖ 不按历史上的说法，阿基米德将它归功于欧多克索斯.

证明 首先假设 $0\leqslant x$，根据阿基米德公理，存在一个整数 $q>(y-x)^{-1}$. 那么 $(1/q)<y-x$. 使得 $y\leqslant(n/q)$ 的整数 n 的集合非空（根据阿基米德公理），因而有一个最小元 p. 那么 $(p-1)/q<y\leqslant(p/q)$，并且 $x=y-(y-x)<(p/q)-(1/q)=(p-1)/q$. 因此 $r=(p-1)/q$ 落在 x 和 y 之间. 若 $x<0$，则可以找到一个整数 n 使得 $n>-x$. 那么 $n+x>0$，因此存在一个有理数 r 使得 $n+x<r<n+y$，且 $r-n$ 是 x 和 y 间的有理数. ■

2.3 扩充的实数

通常为方便起见，我们添加两个元素 $+\infty$ 和 $-\infty$ 以拓广实数系. 这个扩大的集合称为**扩充的实数集**. 通过规定对于每个实数 x 有 $-\infty<x<\infty$，可把 $<$ 的定义拓广到扩充的实数集. 对于所有实数 x，我们定义

$$x+\infty=\infty,\quad x-\infty=-\infty$$
$$x\cdot\infty=\infty\quad 若\ x>0$$
$$x\cdot-\infty=-\infty\quad 若\ x>0$$

且设

$$\infty+\infty=\infty,\quad -\infty-\infty=-\infty$$
$$\infty\cdot(\pm\infty)=\pm\infty,\quad -\infty\cdot(\pm\infty)=\mp\infty.$$

运算 $\infty-\infty$ 无定义. 但我们采用 $0\cdot\infty=0$ 这种随意性的约定.

扩充的实数的一个用法出现在表达式"$\sup S$"中. 若 S 是具有上界的非空实数集，我们定义 $\sup S$ 为 S 的上确界. 若 S 无上界，写为 $\sup S=\infty$，那么 $\sup S$ 对于所有非空集合 S 都有定义. 若定义 $\sup\varnothing$ 为 $-\infty$，则在所有情形下 $\sup E$ 就是大于或等于 E 中每个元素的最小扩充的实数. 对于 $\inf S$ 也采用类似的约定.

取值于扩充的实数集的函数称为*扩充的实值函数*.

36

习题

6. 证明当且仅当 E 非空时有 $\inf E<\sup E$.

2.4 实数序列

谈到实数序列[⊖] $\langle x_n\rangle$，指的是将每个自然数 n 映到实数 x_n 的函数. 我们说实数 l 是序列 $\langle x_n\rangle$ 的*极限*：若对于每个正数 ε，存在一个 N 使得对于所有 $n\geqslant N$ 有 $|x_n-l|<\varepsilon$. 很容易证明一个实数序列至多有一个极限，若有则把该极限记为 $\lim x_n$，记号 $l=\lim x_n$ 表示

$$(\varepsilon>0)(\exists N)(n\geqslant N)(|x_n-l|<\varepsilon).$$

实数序列 $\langle x_n\rangle$ 称为*柯西序列*：若给定 $\varepsilon>0$，存在自然数 N 使得对于所有 $n\geqslant N$ 和 $m\geqslant N$ 有 $|x_n-x_m|<\varepsilon$. *柯西准则*说的是一个实数序列收敛当且仅当它是柯西序列（见习题 11）.

我们用以下方式将序列的极限概念推广到包括 ∞ 值的情形：$\lim x_n=\infty$，若给定 $\Delta>0$，存

⊖ 根据第1章的术语这些是无限序列. 本书其余部分，由于我们感兴趣的主要是无限序列，所以去掉形容词"无限"，并且除非特别说明都假定序列无限.

在自然数 N 使得对所有 $n\geqslant N$ 有 $x_n>\Delta$. 若一个序列有极限则称它为收敛. 这个定义的含义有两种可能性，它取决于我们所指的极限是实数还是扩充的实数. 在大多数分析中较为普遍使用的是限制性的定义，即要求极限是一个实数. 但你会发现在接下来的个别章节中，有很好的理由允许我们把极限取为 $\pm\infty$. 在那些区分两个不同概念的极限是很重要的时候，我们将尽量用短语“收敛于一个实数”或“在扩充的实数集收敛”来明确指出.

若 $l=\lim x_n$，常常写为 $x_n\to l$. 若除此之外，x_n还是单调的，即 $x_n\leqslant x_{n+1}$，则写为 $x_n\uparrow l$.

在极限为实数情形，关于极限的定义可表述如下：l 是$\langle x_n\rangle$的极限，若给定 $\varepsilon>0$，$\langle x_n\rangle$除有限项外其余的一切项与 l 相差不超过 ε. 比序列有极限较弱的要求是序列有无限项与 l 不超过 ε. 这种情形下我们称 l 是序列$\langle x_n\rangle$的**聚点**. 因此若给定 $\varepsilon>0$ 和给定 N，存在 $n\geqslant N$ 使得 $|x_n-l|<\varepsilon$，l 是序列$\langle x_n\rangle$的聚点. 可将这个定义推广到 $l=\infty$的情形. 若给定 Δ 和给定 N，$\exists n\geqslant N$ 使得 $x_n\geqslant\Delta$ 则说∞是$\langle x_n\rangle$的一个聚点. 将该定义稍作修改，对于$-\infty$的情形我们也可给出定义. 因此，若序列有极限 l，则 l 是一个聚点，反之一般不成立. 例如，如下定义的序列$\langle x_n\rangle$：$x_n=(-1)^n$有聚点$+1$ 与-1，但没有极限.

若$\langle x_n\rangle$是一个序列，定义它的上极限如下：

$$\overline{\lim}\, x_n=\inf_n \sup_{k\geqslant n} x_k.$$

记号$\overline{\lim}$与 lim sup 都可用来表示上极限. 一个实数 l 是$\langle x_n\rangle$的上极限当且仅当

(i)给定 $\varepsilon>0$ 存在 n 使得 $x_k<l+\varepsilon$ 对于所有 $k\geqslant n$ 成立.

(ii)给定 $\varepsilon>0$ 和给定 n，存在 $k\geqslant n$ 使得 $x_k>l-\varepsilon$.

扩充的实数∞是序列$\langle x_n\rangle$的上极限当且仅当给定 Δ 和 n，存在 $k\geqslant n$ 使得 $x_k>\Delta$. 扩充的实数$-\infty$是$\langle x_n\rangle$的上极限当且仅当$-\infty=\lim x_n$.

定义下极限如下：

$$\underline{\lim}\, x_n=\sup_n \inf_{k\geqslant n} x_k.$$

我们有$-\underline{\lim}\, x_n=\overline{\lim}(-x_n)$，且$\underline{\lim}\, x_n\leqslant\overline{\lim}\, x_n$. 序列$\langle x_n\rangle$收敛至扩充实数 l 当且仅当 $l=\underline{\lim}\, x_n=\overline{\lim}\, x_n$.

若$\langle x_n\rangle$和$\langle y_n\rangle$是两个序列，则有

$$\begin{aligned}\underline{\lim}\, x_n+\underline{\lim}\, y_n\leqslant\underline{\lim}(x_n+y_n)&\leqslant\overline{\lim}\, x_n+\underline{\lim}\, y_n\\ &\leqslant\overline{\lim}(x_n+y_n)\leqslant\overline{\lim}\, x_n+\overline{\lim}\, y_n,\end{aligned}$$

这里我们假定和式不出现$\infty-\infty$的形式.

习题

7. 证明一个序列至多有一个极限.

8. 证明 l 是$\langle x_n\rangle$的一个聚点当且仅当存在一个收敛于 l 的子序列$\langle x_{n_j}\rangle_{j=1}^{\infty}$.

9. a. 证明$\overline{\lim}\, x_n$与$\underline{\lim}\, x_n$分别是$\langle x_n\rangle$的最大和最小的聚点.

   b. 证明每个有界的无限序列都具有一个收敛到某个实数的子序列.

10. 证明序列$\langle x_n\rangle$收敛当且仅当恰好存在一个扩充的实数作为该序列的一个聚点.
    若我们省略“扩充的”这个论断成立吗？

11. a. 证明收敛到一个实数 l 的序列 $\langle x_n \rangle$ 是一个柯西序列.
   b. 证明每个柯西序列有界.
   c. 证明：若柯西序列有一个收敛到 l 的子序列，那么原序列也收敛到 l.
   d. 建立柯西准则：序列 $\langle x_n \rangle$ 收敛到一个实数 l 当且仅当它是柯西序列.
12. 证明 $\lim x_n = x$ 当且仅当 $\langle x_n \rangle$ 的每个子序列都有收敛到 x 的子序列.
13. 实数 l 是序列 $\langle x_n \rangle$ 的上极限当且仅当(i)给定 $\varepsilon > 0$，存在 n 使得 $x_k < l + \varepsilon$ 对于所有的 $k \geqslant n$ 成立，(ii) 给定 $\varepsilon > 0$ 和 n，存在 $k \geqslant n$ 使得 $x_k > l - \varepsilon$.
14. 证明 $\overline{\lim}\, x_n = \infty$ 当且仅当给定 Δ 和 n，$\exists k \geqslant n$ 使得 $x_k > \Delta$.
15. 证明 $\underline{\lim}\, x_n \leqslant \overline{\lim}\, x_n$，$\underline{\lim}\, x_n = \overline{\lim}\, x_n = l$ 当且仅当 $l = \lim x_n$.
16. 证明

$$\overline{\lim}\, x_n + \underline{\lim}\, y_n \leqslant \overline{\lim}(x_n + y_n) \leqslant \overline{\lim}\, x_n + \overline{\lim}\, y_n,$$

   假定不等式的左右两边不出现 $\infty - \infty$ 的形式.
17. 证明：若 $x_n > 0$，且 $y_n \geqslant 0$ 则

$$\overline{\lim}(x_n y_n) \leqslant (\overline{\lim}\, x_n)(\overline{\lim}\, y_n),$$

   假定右边的乘积不出现 $0 \cdot \infty$ 的形式.
18. 若由 $s_n = \sum_{v=1}^{n} x_v$ 定义的序列 $\langle s_n \rangle$ 以 s 为极限，我们说一个序列(或级数) $\langle x_n \rangle$ **可和**于实数 s 或有一个和 s. 在这种情形我们写 $s = \sum_{v=1}^{\infty} x_v$. 证明：若每个 $x_v \geqslant 0$，则总存在一个扩充的实数 s 使得

$$s = \sum_{v=1}^{\infty} x_v.$$

19. 若序列 $\langle x_v \rangle$ 满足

$$\sum_{v=1}^{\infty} |x_v| < \infty.$$

   证明该序列可和.

39

20. 令 $\langle x_n \rangle$ 是一个实数序列. 证明 $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 当且仅当

$$x = x_1 + \sum_{v=1}^{\infty}(x_{v+1} - x_v).$$

21. 令 E 为正实数集. 我们定义 $\sum\limits_{x \in E} x$ 为 $\sup\{s_F : F \in \mathcal{F}\}$，其中 $\mathcal{F}$ 是 E 的有限子集的集簇，s_F 是 F 的元素的有限和.
   a. 证明 $\sum\limits_{x \in E} x < \infty$ 仅当 E 可数.
   b. 证明：若 E 可数且 $\langle x_n \rangle$ 是从 $\mathbf{N}$ 映上 E 的一对一映射，则 $\sum\limits_{x \in E} x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$.
22. 令 p 为大于 1 的整数，x 是一个实数，$0 < x < 1$. 证明：存在一个整数序列 $\langle a_n \rangle$ 满足 $0 \leqslant a_n < p$，使得

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{p^n}$$

除去当 x 具有形式 q/p^n(这种情况下恰有两种这样的序列)外，该序列是惟一的. 证明，反之，若 $\langle a_n\rangle$ 是满足 $0\leqslant a_n<p$ 的任何整数序列，级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{p^n}$$

收敛到一个实数 x，其中 $0\leqslant x\leqslant 1$. 若 $p=10$，该序列称为 x 的十进制展开. 对于 $p=2$ 它称为二进制展开；对于 $p=3$，它称为三进制展开.

23. 证明 **R** 不可数. [用习题 1.24. 用系 3.4 可给出另外一个证明].

2.5　实数的开集与闭集

最简单的实数集是区间. 我们定义开区间 (a, b) 为集合 $\{x: a<x<b\}$. 通常总是取 $a<b$，但也考虑无限区间 $(a, \infty)=\{x: a<x\}$ 和 $(-\infty, b)=\{x: x<b\}$. 有时也将实数集写为 $(-\infty, \infty)$. 定义闭区间 $[a, b]$ 为集合 $\{x: a\leqslant x\leqslant b\}$. 对于闭区间 $[a, b]$，我们取 a 与 b 有限但总是假定 $a<b$. 定义半开区间 $(a, b]$ 为集合 $\{x: a<x\leqslant b\}$，与 $[a, b)=\{x: a\leqslant x<b\}$. 开区间的推广就是开集：

40

定义　实数集 O 称为**开的**，若对每个 $x\in O$ 存在 $\delta>0$ 使得每个满足 $|x-y|<\delta$ 的 y 都属于 O.

该定义的另外一种叙述方式是：一个集合 O 是开的，若对 O 中的每一点 x 存在区间 I 使得 $x\in I\subset O$. 开区间是开集的一个例子，空集 $\varnothing$ 和实数集 **R** 也都是开集. 下面给出开集的一些性质.

5. 命题　两个开集 O_1 和 O_2 的交集 $O_1\cap O_2$ 是开的.

证明　令 $x\in O_1\cap O_2$. 由于 $x\in O_1$，O_1 是开的，则存在一个 $\delta_1>0$ 使得所有满足 $|x-y|<\delta_1$ 的 y 属于 O_1. 类似地，存在 $\delta_2>0$ 使得所有满足 $|x-y|<\delta_2$ 的 y 属于 O_2. 取 δ 为 δ_1 和 δ_2 中较小的数，那么 $\delta>0$，且若 $|x-y|<\delta$，则 y 既属于 O_1 又属于 O_2，即属于 $O_1\cap O_2$. ■

6. 命题　任意有限开集的交集是开的.

7. 命题　任意开集簇 $\mathcal{C}$ 的并集是开的.

证明　令 U 为集簇 $\mathcal{C}$ 的并，$x\in U$. 那么存在 $O\in\mathcal{C}$ 满足 $x\in O$. 由于 O 是开的，则存在 $\varepsilon>0$ 使得所有满足 $|x-y|<\varepsilon$ 的 y 属于 O，因而属于 U(由于 $O\subset U$). 因此 U 是开的. ■

根据命题 5 任意有限个开集构成的集簇的交集为开集. 然而，任意个开集构成的集簇的交集不一定为开集，例如，取 O_n 为开区间 $(-1/n, 1/n)$. 那么 $\bigcap_{n=1}^{\infty}O_n=\{0\}$，而 $\{0\}$ 不是开集.

41

由命题 7 知开区间的并集是开集. 其较强形式的逆也是正确的：

8. 命题　实数集的每个开集都是可数不交开区间的并集.

证明　由于 O 是开的，对于每个 $x\in O$ 存在一个 $y>x$ 使得 $(x, y)\subset O$. 令 $b=\sup\{y: (x, y)\subset O\}$，$a=\inf\{z: (z, x)\subset O\}$，那么 $a<x<b$，且 $I_x=(a, b)$ 是包含 x 的开区

间. 现在$I_x \subset O$,这是因为若 $w \in I_x$，例如 $x<w<b$，根据 b 的定义可找到一个 $y>w$ 使得$(x, y) \subset O$，进而 $w \in O$. 进一步的分析，$b \notin O$ 这是因为若 $b \in O$，则对某个 $\varepsilon>0$ 有$(b-\varepsilon, b+\varepsilon) \subset O$，因此有$(x, b+\varepsilon) \subset O$，而这与 b 的定义有矛盾. 类似地，还可以证明 $a \notin O$. 考虑开区间簇$\{I_x\}$，$x \in O$. 由于 O 的每个元素 x 包含在 I_x 内，且每个 I_x 包含于 O，就有 $O=\bigcup I_x$. 令(a, b)和(c, d)为这个集簇中有公共点的两个区间，那么必须有 $c<b$ 与 $a<d$. 由于 c 不属于 O，不属于(a, b)，因而有 $c \leqslant a$. 而 a 不属于 O，不属于(c, d)，所以有 $a \leqslant c$，因此 $a=c$. 类似地，$b=d$，$(a, b)=(c, d)$. 因此开区间簇$\{I_x\}$内的不同区间是不交的，O 是不交开区间簇$\{I_x\}$的并集. 接下来仅需证明该集簇是可数的. 根据阿基米德公理的系可知每个开区间都包含一个有理数. 因为有一个不相交的开区间簇，每个开区间都包含一个不同的有理数，而这个开区间簇可与有理数的一个子集建立一一对应，所以它是一个可数簇. ■

9. 命题（林德勒夫） 令$\mathcal{C}$为实数的开集簇，那么存在$\mathcal{C}$的一个可数子簇$\{O_i\}$使得

$$\bigcup_{O \in \mathcal{C}} O=\bigcup_{i=1}^{\infty} O_i .$$

证明 令 $U=\bigcup\{O: O \in \mathcal{C}\}$，$x \in U$. 那么存在一个 $O \in \mathcal{C}$ 且 $x \in O$. 由于 O 是开的，因而存在一个开间 I_x 使得 $x \in I_x \subset O$. 根据系 4，可以找到一个有有理端点的开区间 J_x 使得 $x \in J_x \subset I_x$. 因为具有有理端点的开区间簇是可数的，所以集簇$\{J_x\}$，$x \in U$ 是可数的，并且 $U=\bigcup\limits_{x \in U} J_x$. 对于$\{J_x\}$的每个区间，选取$\mathcal{C}$的一个集合 O 包含它. 这样就给出了$\mathcal{C}$的可数子簇 $\{O_i\}_{i=1}^{\infty}$，而且 $U=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} O_i$. ■

42

我们还将研究闭集的概念，它是闭区间的推广. 下面就从定义闭包点开始：

定义 实数 x 称为集合 E 的**闭包点**：若对于每个 $\delta>0$ 都存在一个属于 E 的 y 使得 $|x-y|<\delta$.

这个定义等价于说 x 是 E 的闭包点：若每个包含 x 的开区间也包含 E 的点. 显然，E 上的每一点就是 E 的闭包点. 我们将 E 闭包点的集合记为$\bar{E}$，因此 $E \subset \bar{E}$.

10. 命题 若 $A \subset B$，则$\bar{A} \subset \bar{B}$，同时$(\overline{A \cup B})=\bar{A} \cup \bar{B}$.

证明 命题的第一部分可直接从闭包点的定义得到. 由于 $A \subset A \cup B$，有$\bar{A} \subset(\overline{A \cup B})$. 类似地，$\bar{B} \subset(\overline{A \cup B})$，因此$\bar{A} \cup \bar{B} \subset(\overline{A \cup B})$. 假设 x 不属于$\bar{A} \cup \bar{B}$，那么存在一个 $\delta_1>0$ 使得 A 中的点 y 均不满足 $|x-y|<\delta_1$，存在一个 $\delta_2>0$ 使得 B 中的点 y 均不满足 $|x-y|<\delta_2$. 因此若 $\delta=\min(\delta_1, \delta_2)$，则 $A \cup B$ 中不存在满足 $|x-y|<\delta$ 的点 y. 所以，x 不属于$(\overline{A \cup B})$，并有$(\overline{A \cup B}) \subset \bar{A} \cup \bar{B}$. ■

定义 对于一个集合 F，若 $F=\bar{F}$则称它为**闭的**.

由于总有 $F \subset \bar{F}$，因此对于一个集合 F 若$\bar{F} \subset F$，即若 F 包含它的所有闭包点则 F 是闭的. 空集$\varnothing$和实数集 $\mathbf{R}$ 是闭的，闭区间$[a, b]$和$[a, \infty)$也是闭的.

习惯上用字母 F 来表示闭集(法语，fermé).

11. 命题 对于任意集合 E，集合 $\bar{E}$ 是闭的：即$\overline{\bar{E}}=\bar{E}$.

证明 令 x 为$\bar{E}$ 的闭包点，那么，给定 $\delta>0$，存在一个 $y \in \bar{E}$ 使得 $|x-y|<\delta/2$. 由于

[43] $y\in\bar{E}$，存在一个 $z\in E$ 满足 $|z-y|<\delta/2$，因此 $|x-z|<\delta$，可知 x 是 E 的闭包点. ■

12. 命题 两个闭集 F_1 与 F_2 的并集 $F_1\cup F_2$ 是闭的.

证明 根据命题 10 有

$$(\overline{F_1\cup F_2})=\bar{F}_1\cup\bar{F}_2=F_1\cup F_2.$$ ■

13. 命题 任意闭集簇$\mathcal{C}$的交集是闭的.

证明 令 x 为$\bigcap\{F: F\in\mathcal{C}\}$的闭包点，那么，给定 $\delta>0$，存在一个 $y\in\bigcap\{F: F\in\mathcal{C}\}$使得 $|x-y|<\delta$. 由于这样的 y 属于每个 $F\in\mathcal{C}$，所以 x 是每个 $F\in\mathcal{C}$的闭包点. 而每个 F 都是闭的，又有 $x\in F$，因此 $x\in\bigcap\{F: F\in\mathcal{C}\}$. ■

14. 命题 开集的补集是闭的，闭集的补集是开的.

证明 令 O 是开的. 若 $x\in O$，存在一个 $\delta>0$ 使得若 $|x-y|<\delta$，则 $y\in O$，因此 x 不能是 $\tilde{O}$ 的闭包点. 由于不存在一个 $y\in\tilde{O}$ 使得 $|x-y|<\delta$，因此 $\tilde{O}$ 包含它的所有闭包点，所以是闭的.

另一方面，令 F 为闭的，$x\in\tilde{F}$，那么，由于 x 不是 F 的闭包点，所以存在一个 $\delta>0$ 使得没有 $y\in F$ 满足 $|x-y|<\delta$. 因此，若 $|x-y|<\delta$，则 $y\in\tilde{F}$，故而 $\tilde{F}$ 是开的. ■

对于集簇$\mathcal{C}$与集合 F，若 $F\subset\bigcup\{O: O\in\mathcal{C}\}$，则称集簇$\mathcal{C}$**覆盖**集合 F，在这种情况下集簇$\mathcal{C}$称为 F 的一个**覆盖**. 若每个 $O\in\mathcal{C}$是开的，我们称$\mathcal{C}$是 F 的**开覆盖**. 若$\mathcal{C}$仅包含有限个集合，则称$\mathcal{C}$是**有限覆盖**. 实际上这个术语有些不一致：在"开覆盖"里，形容词"开"指的是覆盖集是开的；而在"有限覆盖"中，形容词"有限"指的却是集簇有限但并不是指集簇中的集是有限集. 所以术语"开覆盖"是语言上的误用，确切的说法应是"被开集覆盖". 但是，这个术语已在数学领域中被广泛使用. 下面就用这个术语来叙述定理：

[44] **15. 定理**（海涅-博雷尔） 令 F 为闭有界实数集，那么 F 的每个开覆盖都有一个有限子覆盖. 即若$\mathcal{C}$是一个开集簇使得 $F\subset\bigcup\{O: O\in\mathcal{C}\}$，则存在一个$\mathcal{C}$的有限集簇$\{O_1, \cdots, O_n\}$使得

$$F\subset\bigcup_{i=1}^{n}O_i.$$

证明 首先考虑 F 是闭区间$[a, b]$的情形，其中$-\infty<a<b<\infty$. 令 E 为具有以下性质的数集 $x\leqslant b$：区间$[a, x]$可被$\mathcal{C}$的有限个集合覆盖. 由于 $a\in E$，所以 E 非空. 而 b 是它的界，它就有上确界 c. 由于 $c\in[a, b]$，存在一个 $O\in\mathcal{C}$包含 c. 既然 O 是开的，那么存在 $\varepsilon>0$ 使得区间$(c-\varepsilon, c+\varepsilon)$包含于 O. 现在 $c-\varepsilon$ 不是 E 的上界，因而必有一点 $x\in E$ 满足 $x>c-\varepsilon$. 因为 $x\in E$，所以存在$\mathcal{C}$中的有限集簇$\{O_1, \cdots, O_k\}$覆盖$[a, x]$. 相应地，有限集簇$\{O_1, \cdots, O_k, O\}$覆盖$[a, c+\varepsilon)$. 因此$[c, c+\varepsilon)$中小于或等于 b 的点落在 E 中. 由于$[c, c+\varepsilon)$除 c 外其他的点不可能属于 E，必有 $c=b$ 且 $b\in E$. 因此$[a, b]$可被$\mathcal{C}$的有限个集合覆盖，这就证明了此种特殊情形.

现在令 F 为任意有界闭集且$\mathcal{C}$是 F 的开覆盖. 由于 F 有界，所以它包含在某个闭有界区间$[a, b]$中. 令$\mathcal{C}^*$为将 $\tilde{F}$ 加入$\mathcal{C}$后所得到的集簇；即$\mathcal{C}^*=\mathcal{C}\cup\{\tilde{F}\}$. 由于 F 是闭的，$\tilde{F}$ 是开的，且$\mathcal{C}^*$是一个开集簇. 根据假设，$F\subset\bigcup\{O: O\in\mathcal{C}\}$，因而 $\mathbf{R}=\tilde{F}\cup F\subset\tilde{F}\cup(\bigcup\{O: O\in\mathcal{C}\})=\bigcup\{O:O\in\mathcal{C}^*\}$. 所以$\mathcal{C}^*$是 $\mathbf{R}$ 的开覆盖，自然也是$[a, b]$的开覆盖. 根据前面的证明，存在$\mathcal{C}^*$的有限集簇覆盖$[a, b]$，因而覆盖 F. 如果该有限子簇不包含 $\tilde{F}$，由于它是$\mathcal{C}$的子簇因而定理

的结论成立. 如果该子簇包含 $\tilde{F}$，将它记为$\{O_1, \cdots, O_n, \tilde{F}\}$. 那么 $F \subset \tilde{F} \cup O_1 \cup \cdots \cup O_n$. 因为 F 的点不含于 $\tilde{F}$，所以有 $F \subset O_1 \cup \cdots \cup O_n$，而集簇$\{O_1, \cdots, O_n\}$是覆盖$F$ 的$\mathcal{C}$的有限集簇. ■

16. 命题　令$\mathcal{C}$为(实数集的)闭集簇且具有性质：$\mathcal{C}$的每个有限子簇都有非空交集，并假定$\mathcal{C}$的这些集合中的一个有界，那么

$$\bigcap_{F \in \mathcal{C}} F \neq \varnothing.$$

45

习题

24. 有理数集是开集还是闭集?
25. 什么样的实数集既开又闭?
26. 找到两个集合 A 与 B 满足 $A \cap B = \varnothing$ 与 $\overline{A} \cap \overline{B} \neq \varnothing$.
27. 证明 x 是 E 的闭包点当且仅当存在一个序列$\langle y_n \rangle$满足 $y_n \in E$ 且 $x = \lim y_n$.
28. 一个数 x 称为是集合 E 的**聚点**，若它是 $E \sim \{x\}$的闭包点. 证明 E 的聚点集合 E'是一个闭集.
29. 证明 $\overline{E} = E \cup E'$.
30. 一个集合称为**孤立的**：若 $E \cap E' = \varnothing$. 证明每个实数集的孤立集都可数.
31. 一个集合 D 称为**在 R 稠密**：若 $\overline{D} = \mathbf{R}$. 证明有理数集在 $\mathbf{R}$ 稠密.
32. 用命题 5、7 和 14 证明命题 12 和 13.
33. 用命题 12、13 和 14 证明命题 5 和 7.
34. 一个点 x 称为集合 A 的**内点**：若存在 $\delta > 0$ 使得区间$(x-\delta, x+\delta)$包含于 A. 将 A 的内点集记为 A°. 证明
    a. A 是开的当且仅当 $A = A^\circ$.
    b. $A^\circ = \sim(\overline{\tilde{A}})$.
35. 运用德摩根律由海涅-博雷尔定理导出命题 16.
36. 令$\langle F_n \rangle$为实数的非空闭集序列且满足 $F_{n+1} \subset F_n$. 证明：若集合 F_n 中有一个有界，则 $\bigcap_{i=1}^{\infty} F_i \neq \varnothing$. 请举出一个例子说明，若不要求这些集合中的一个有界，该结论可能不成立.
37. **康托尔三分集** C 是由所有$[0, 1]$中的实数的三进制展开$\langle a_n \rangle$组成的，其中 a_n不等于 1(参见习题 22). (若 x 有两个三进制展开，则将没有等于 1 的项的那个展开式放入康托尔集.)证明 C 是一个闭集而且它可如此得到：首先从$[0, 1]$中去掉中间区间$\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$，然后再从剩余的区间里去掉$\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$和$\left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$，以此类推.
38. 证明康托尔三分集可与区间$[0, 1]$一一对应.
39. 证明康托尔三分集的聚点集是康托尔三分集本身.

46

2.6 连续函数

令 f 为定义在实数集 E 上的实值函数. 我们说 f 在 E 中的点 x **连续**，若给定 $\epsilon > 0$，存在

$\delta>0$ 使得对于 E 中所有满足 $|x-y|<\delta$ 的 y 有 $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$. 若函数 f 在 E 的子集 A 的每一点都连续，则说它在 A 上**连续**. 如果仅说 f 连续，指的就是 f 在其定义域连续.

17. 命题　若 f 是定义在闭有界实数集 F 上的实值连续函数，则 f 在 F 上有界，并能取到它在 F 上的最大值与最小值；即存在 F 中的点 x_1 和 x_2，使得对于 F 中的所有 x 有 $f(x_1)\leqslant f(x)\leqslant f(x_2)$.

证明　首先证明 f 在 F 上有界. 由于 f 在 F 上连续，那么对于每个 $x\in F$ 存在包含 x 的开区间 I_x，使得 $|f(y)-f(x)|<1$ 对于 $y\in I_x\cap F$ 成立. 因此对于 $y\in I_x\cap F$，有 $|f(y)|\leqslant |f(x)|+1$，因而 f 在 I_x 上有界. 集簇 $\{I_x: x\in F\}$ 是一个覆盖 F 的开区间簇，根据海涅-博雷尔定理存在一个覆盖 F 的有限子簇 $\{I_{x_1}, \cdots, I_{x_n}\}$. 令 $M=1+\max[|f(x_1)|, \cdots, |f(x_n)|]$. 那么 F 中的每个 y 都属于该有限子簇的某个区间 I_{x_k}，因而 $|f(y)|<1+|f(x_k)|\leqslant M$. 这就表明 f 在 F 上有界（M 为它的界）.

为证明 f 在 F 上取到最大值点，令 $m=\sup\{f(x): x\in F\}$. 由于 f 有界，故 m 有限，我们的目标是证明存在一个 $x_1\in F$ 使得 $f(x_1)=m$. 若非如此，那么对于 F 中的每个 x，$f(x)<m$，并且根据连续性可知存在一个包含 x 的开区间 I_x，对所有的 $y\in I_x\cap F$，有 $f(y)<\frac{1}{2}(f(x)+m)$. 再次使用海涅-博雷尔定理，可以找到有限个覆盖 F 的这类区间 $\{I_{x_1}, \cdots, I_{x_n}\}$. 令 $a=\max[f(x_1), \cdots, f(x_n)]$，那么每个 $y\in F$ 都属于某个区间 I_{x_k} 且 $f(y)<\frac{1}{2}[f(x_k)+m]\leqslant\frac{1}{2}(a+m)$. 因此 $\frac{1}{2}(a+m)$ 是 f 在 F 上的界. 但是 $\frac{1}{2}(a+m)<m$，所以这是不可能的. 故而，必有一点 x_1 使得 $f(x_1)=m$. 类似地，可证明存在 x_2 使得 f 在该点取到最小. ■

18. 命题　令 f 为定义在 $(-\infty, \infty)$ 上的实值函数，那么 f 连续当且仅当对于每个实数的开集 O，集合 $f^{-1}[O]$ 是开的.

47

证明　假设对于每个开集 O，$f^{-1}[O]$ 是开的，令 x 为任意实数，那么，给定 $\varepsilon>0$，区间 $I=(f(x)-\varepsilon, f(x)+\varepsilon)$ 是一个开集，因此它的逆像 $f^{-1}[I]$ 必须是开的. 由于 $x\in f^{-1}[I]$，必有某个 $\delta>0$ 使得 $(x-\delta, x+\delta)\subset f^{-1}[I]$. 但这意味着，若 $|y-x|<\delta$，则 $f(y)\in(f(x)-\varepsilon, f(x)+\varepsilon)$；即 $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$. 因此 f 在点 x 连续. 由于 x 是任意的，所以 f 连续.

现在假设 f 连续而 O 是一个开集. 令 x 为 $f^{-1}[O]$ 的点，那么 $f(x)\in O$，且存在一个 $\varepsilon>0$ 使得 $(f(x)-\varepsilon, f(x)+\varepsilon)\subset O$. 由于 f 在 x 连续，则存在一个 $\delta>0$，使得当 $|x-y|<\delta$ 时 $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$. 因此，对于每个 $y\in(x-\delta, x+\delta)$，有 $f(y)\in(f(x)-\varepsilon, f(x)+\varepsilon)\subset O$. 所以 $(x-\delta, x+\delta)\subset f^{-1}[O]$，故而 $f^{-1}[O]$ 是开的. ■

19. 命题（介值定理）　若 f 是定义在 $[a, b]$ 上的连续实值函数，并假定 $f(a)\leqslant\gamma\leqslant f(b)$ [或 $f(b)\leqslant\gamma\leqslant f(a)$]，则存在点 $c\in[a, b]$ 使得 $f(c)=\gamma$.

定义　定义在集合 E 的实值函数 f 称为**一致连续的**（在 E 上），若给定 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得对 E 中所有满足 $|x-y|<\delta$ 的 x 和 y 有 $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$.

20. 命题　若实值函数 f 定义在实数的闭有界子集 F 上并在其上连续，则它在 F 上一致连续.

证明　给定 $\varepsilon>0$ 和属于 F 的 x，存在 $\delta_x>0$ 使得 $|x-y|<\delta_x$ 蕴涵 $|f(x)-f(y)|<\frac{1}{2}\varepsilon$. 令 O_x 为区间 $\left(x-\frac{1}{2}\delta_x,\ x+\frac{1}{2}\delta_x\right)$，那么 $\{O_x: x\in F\}$ 是 F 的一个开覆盖. 根据海涅-博雷尔定理知，存在 F 的一个有限子覆盖 $\{O_{x_1}, \cdots, O_{x_n}\}$. 令 $\delta=\frac{1}{2}\min(\delta_{x_1}, \cdots, \delta_{x_n})$，那么 δ 是正的. 给定 F 中的两点 y 与 z 使得 $|y-z|<\delta$，那么点 y 必须属于某个 O_{x_i}，因而存在一个 i 使得 $|y-x_i|<\frac{1}{2}\delta_{x_i}$. 因此

$$|z-x_i|\leqslant|z-y|+|y-x_i|<\frac{1}{2}\delta_{x_i}+\delta\leqslant\delta_{x_i}.$$

而且

$$|f(y)-f(x_i)|<\frac{\varepsilon}{2}$$

以及

$$|f(z)-f(x_i)|<\frac{\varepsilon}{2},$$

48

这就得到

$$|f(z)-f(y)|<\varepsilon,$$

这表明 f 在 F 上是一致连续的. ■

定义　定义在集合 E 上的函数序列 $\langle f_n\rangle$ 称为逐点收敛于 f，若对于 E 中的每个 x 有 $f(x)=\lim f_n(x)$；即若给定 $x\in E$ 与 $\varepsilon>0$，那么存在一个 N 使得对所有 $n\geqslant N$，有 $|f(x)-f_n(x)|<\varepsilon$.

定义　定义在集合 E 上的函数序列 $\langle f_n\rangle$ 称为在 E 上一致收敛的，若给定 $\varepsilon>0$，则存在一个 N 使得对所有 $x\in E$ 和 $n\geqslant N$，有 $|f(x)-f_n(x)|<\varepsilon$.

习题

40. 令 F 为闭实数集，f 是定义在 F 上的连续实值函数. 证明存在一个定义在 $(-\infty, \infty)$ 上的连续函数 g，使得 $f(x)=g(x)$ 对于每个 $x\in F$ 都成立. [提示：取 g 使其在构成 $\tilde{F}$ 的每个区间线性.]
41. 令 f 为定义在 E 上的实值函数. 证明 f 连续当且仅当对于每个开集 O 存在一个开集 U 使得 $f^{-1}[O]=E\cap U$.
42. 令 $\langle f_n\rangle$ 为定义在 E 上的连续函数序列. 证明：若 $\langle f_n\rangle$ 在 E 上一致收敛于 f，则 f 在 E 上连续.
43. 令 f 为

$$f(x)=\begin{cases} x & \text{若 } x \text{ 为无理数} \\ p\sin\dfrac{1}{q} & \text{若 } x=\dfrac{p}{q}\quad p,q \text{ 互素} \end{cases}$$

所定义的函数，请问 f 在什么点连续？

44. a. 证明若 f 和 g 是连续函数，则函数 $f+g$ 和 fg 是连续的.

b. 若 f 和 g 是连续函数，则 $f\circ g$ 也是连续函数.

c. 令 $f\vee g$ 是由 $(f\vee g)(x)=f(x)\vee g(x)$ 定义的函数，类似地定义 $f\wedge g$. 证明若 f 和 g 是连续函数，则 $f\vee g$ 和 $f\wedge g$ 也是连续函数.

d. 若 f 是连续函数，则 $|f|$ 也是连续函数.

45. 证明命题 19.

49

46. 实值函数 f 称为单调递增的，若只要 $x\leqslant y$ 就有 $f(x)\leqslant f(y)$. f 称为严格单调递增的，若只要 $x<y$ 就有 $f(x)<f(y)$. 如果 f 或 $-f$ 是单调(或严格单调)递增的，就称为单调(或严格单调)的. 令 f 为定义在区间 $[a, b]$ 上的连续函数，那么存在一个连续函数 g 使得 $g(f(x))=x$ 对所有属于 $[a, b]$ 的 x 都成立当且仅当 f 严格单调. 在此情形也有 $f(g(y))=y$ 对 $f(a)$ 与 $f(b)$ 间的每个 y 都成立. 具有连续逆的函数 f 称为(在它的定义域和值域之间的)同胚映射.

47. 定义在区间 $[a, b]$ 上的连续函数 φ 称为折线的(或分段线性的)，若存在一个分划 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ 使得 φ 在每个区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 都是线性的. 令 f 为 $[a, b]$ 上的任意连续函数且 ε 是一个正数，证明 $[a, b]$ 上存在一个折线函数 φ 满足：对所有 $x\in[a, b]$，有 $|f(x)-\varphi(x)|<\varepsilon$.

48. 设 x 为 $[0, 1]$ 间的实数并具有三进制展开 $\langle a_n\rangle$(参见习题 22). 令 $N=\infty$，当所有 a_n 都不等于 1. 否则令 N 为使得 $a_n=1$ 的最小值 n. 对于 $n<N$，令 $b_n=\frac{1}{2}a_n$，$b_N=1$. 证明

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{b_n}{2^n}$$

与 x 的三进制展开无关(若 x 有两个三进制展开)，而由下式

$$f(x)=\sum_{n=1}^{N}\frac{b_n}{2^n}$$

所定义的函数 f 是 $[0, 1]$ 上的连续单调函数. 证明 f 在包含于康托尔三分集的补集的每个区间(习题 37)都是常数，并且 f 将康托尔三分集映上区间 $[0, 1]$. (该函数称为康托尔三分函数.)

49. 实变函数的上极限. 令 f 为对所有包含 y 的区间内的 x 所定义的实值(或扩充的实值)函数. 我们定义

$$\overline{\lim_{x\to y}}f(x)=\inf_{\delta>0}\sup_{0<|x-y|<\delta}f(x)$$

$$\overline{\lim_{x\to y+}}f(x)=\inf_{\delta>0}\sup_{0<x-y<\delta}f(x)$$

类似地还可给出 $\underline{\lim}$ 的定义.

a. $\overline{\lim\limits_{x\to y}}f(x)\leqslant A$ 当且仅当，给定 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$ 使得对于所有满足 $0<|x-y|<\delta$ 的 x，有 $f(x)\leqslant A+\varepsilon$.

b. $\overline{\lim\limits_{x\to y}}f(x)\geqslant A$ 当且仅当给定 $\varepsilon>0$ 和 $\delta>0$，存在一个 x 使得 $0<|x-y|<\delta$ 并且 $f(x)\geqslant A-\varepsilon$.

50

c. $\underline{\lim}_{x\to y} f(x) \leqslant \overline{\lim}_{x\to y} f(x)$等式成立(对于$\overline{\lim} f \neq \pm\infty$)当且仅当$\lim_{x\to y} f(x)$存在.

d. 若$\overline{\lim}_{x\to y} f(x)=A$，$\langle x_n\rangle$是满足 $x_n\neq y$ 的序列使得 $y=\lim x_n$，则$\overline{\lim} f(x_n)\leqslant A$.

e. 若$\overline{\lim}_{x\to y} f(x)=A$，则存在一个满足 $x_n\neq y$ 的序列$\langle x_n\rangle$使得 $y=\lim x_n$且$A=\lim f(x_n)$.

f. 对于实数 l，$l=\lim_{x\to y} f(x)$，当且仅当 $l=\lim f(x_n)$对每个满足 $x_n\neq y$ 且 $y=\lim x_n$的序列$\langle x_n\rangle$成立.

50. **半连续函数.** 我们称一个扩充的实值函数 f 在 y 点是下半连续的，若 $f(y)\neq -\infty$且 $f(y)\leqslant \underline{\lim}_{x\to y} f(x)$. 类似地，称一个函数 f 在 y 是上半连续的，若 $f(y)\neq +\infty$且 $f(y)\geqslant \overline{\lim}_{x\to y} f(x)$. 若一个函数 f 在区间的每一点下半(上半)连续，则称它是下半(上半)连续. 函数 f 上半连续当且仅当$-f$是下半连续.

a. 令 $f(y)$有限. 证明 f 在 y 下半连续，当且仅当给定 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$ 使得 $f(y)\leqslant f(x)+\varepsilon$ 对所有满足 $|x-y|<\delta$ 的 x 成立.

b. 函数 f 连续(在点或区间)当且仅当它既是上半连续又是下半连续(在点或区间).

c. 证明实值函数 f 在(a, b)下半连续当且仅当对于每个实数 λ，集合$\{x: f(x)>\lambda\}$都是开集.

d. 若 f 和 g 是下半连续函数，则 $f\vee g$ 和 $f+g$ 也如此.

e. 若$\langle f_n\rangle$是一个下半连续函数序列，证明函数 $f(x)=\sup\{f_n(x): n\}$也是下半连续函数.

f. 定义在区间$[a, b]$上的实值函数 φ 称为**阶梯函数**：若存在一个分划 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ 使得对每个 i 函数 φ 在区间(x_i, x_{i+1})仅取一个值. 证明一个阶梯函数 φ 下半连续当且仅当 $\varphi(x_i)$小于或等于它在区间(x_{i-1}, x_i)和(x_i, x_{i+1})所取到的较小值.

•g. 定义在区间$[a, b]$上的函数 f 是下半连续的，当且仅当存在一个单调递增的、下半连续的阶梯函数序列$\langle\varphi_n\rangle$，使得对于每个 $x\in[a, b]$都有 $f(x)=\lim\varphi_n(x)$.

h. 定义在区间$[a, b]$上的函数 f 是下半连续的，当且仅当存在一个单调递增的连续函数序列$\langle\psi_n\rangle$，使得对于每个 $x\in[a, b]$有 $f(x)=\lim \psi_n(x)$. [提示：修改(g)部分的函数 φ_n 使得它们连续.]

51

i. 证明一个定义在$[a, b]$上，并在其上有下界的下半连续函数 f 在$[a, b]$上可取到最小值，即存在一个$y\in[a, b]$，使得对于所有 $x\in[a, b]$都有 $f(y)\leqslant f(x)$.

51. **函数的上下包络.** 令 f 为定义在 $[a, b]$上的实值函数，我们定义 f 的下包络 g 为函数

$$g(y)=\sup_{\delta>0}\inf_{|x-y|<\delta} f(x),$$

而定义 f 的上包络 h 为函数

$$h(y)=\inf_{\delta>0}\sup_{|x-y|<\delta} f(x).$$

a. 对于每个 $x\in[a, b]$，$g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$和 $g(x)=f(x)$，当且仅当 f 在 x 下半连续，而 $g(x)=h(x)$当且仅当 f 在 x 连续.

b. 若 f 有界，则函数 g 下半连续，而 h 上半连续.

c. 若 φ 是使得 $\varphi(x)\leqslant f(x)$对于所有 $x\in[a, b]$都成立的下半连续函数，那么对于所有的 $x\in[a,b]$有$\varphi(x)\leqslant g(x)$.

2.7 博雷尔集

虽然任意闭集簇的交集与任意有限闭集簇的并集均为闭集，但可数闭集簇的并集不一定为闭集. 例如，有理数集是可数闭集簇(其中每个集合仅包含一个数)之并. 因此若对包含所有闭集的 σ 代数感兴趣，就必须考虑比开集与闭集更一般的集合，这就导致以下定义：

定义　博雷尔集簇$\mathcal{B}$为包含所有开集的最小 σ 代数.

由命题 1.3 可知存在这样一个最小的 σ 代数，它也是包含所有闭集的最小 σ 代数与包含所有开区间的最小 σ 代数.

52

若一个集合是可数闭集的并集则称它为一个 F_σ集(F 表示闭，σ 表示求和)，因此每个可数集都是 F_σ，当然每个闭集也如此. F_σ 中的集的可数并集仍然在 F_σ内. 由于

$$(a,b)=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left[a+\frac{1}{n},b-\frac{1}{n}\right],$$

所以每个开区间是 F_σ，因而每个开集都是 F_σ.

我们称一个集合为 G_δ，若它是可数开集簇的交集(G 表示开，δ 代表 durchschnitt). 因此一个 F_σ集的补集是 G_δ，反过来也对.

F_σ与 G_δ 是两种相对简单的博雷尔集. 我们也可考虑像 $F_{\sigma\delta}$类型的集合，它是每个成员为 F_σ的可数集簇的交集. 类似地，还可以构造 $G_{\delta\sigma}$，$F_{\sigma\delta\sigma}$类等等. 因此以下两个序列

$$F_\sigma,F_{\sigma\delta},F_{\sigma\delta\sigma},\cdots,G_\delta,G_{\delta\sigma},G_{\delta\sigma\delta},\cdots$$

中的类型的集合都是博雷尔集. 然而，并非每个博雷尔集都属于以上类型中的一个. 博雷尔集的进一步理论可从 Kuratowski [11] 中找到，但我们仅需要那些直接从它们是构成包含所有开集与闭集的最小 σ 代数这一事实所导出的性质.

习题

52. 令 f 为对于所有实数定义的下半连续函数. 对于集合$\{x: f(x)>\alpha\}$，$\{x: f(x)\geqslant\alpha\}$，$\{x: f(x)<\alpha\}$，$\{x: f(x)\leqslant\alpha\}$与$\{x: f(x)=\alpha\}$可以得出什么结论?
53. 令 f 为对于所有实数定义的实值函数，证明 f 的连续点的集合是 G_δ.

53

54. 令$\langle f_n\rangle$为定义在 $\mathbf{R}$ 上的连续函数序列，证明使得该序列收敛的点集 C 是 $F_{\sigma\delta}$.

第3章　勒贝格测度

3.1　引言

与往常一样，把区间 I 的长度 $l(I)$ 定义为该区间的端点差. 长度是集函数的一个例子，即将集簇的每个集赋予一个扩充实数. 在长度的情形下集函数的定义域就是所有区间组成的簇，我们想将长度的概念推广到比区间更为复杂的集合，例如可以定义开集的“长度”为组成它的开区间的长度的和. 然而对于我们的目标来说，开集仍显得过于狭隘. 我们想构造一个集函数 m，它能赋予实数集簇 $\mathfrak{M}$ 中的每个集合 E 一个非负扩充实数 mE. 我们将此集函数称为 E 的测度. 最理想的情况是 m 具有以下性质：

i. mE 对于实数集的每个子集 E 都有定义；即 $\mathfrak{M}=\mathcal{P}(\mathbf{R})$.

ii. 对于区间 I，$mI=l(I)$.

iii. 若 $\langle E_n\rangle$ 是不相交集合的序列(m 在其上有定义)，

$$m(\bigcup E_n)=\sum mE_n.$$

iv. m 是平移不变的；即若 E 是一个集合使得 m 在其上有定义，而且若 $E+y$ 是集合 $\{x+y: x\in E\}$，即将 E 的每个点 x 用点 $x+y$ 代替所得到的集合，则

$$m(E+y)=mE.$$

54

遗憾的是，我们将在 3.4 节看到，不可能构造出满足所有性质的集函数，而且也不知道能否构造出满足前三条性质[⊖]的集函数. 相应地，必须要把这些性质中的某一条减弱，最有效的处理方法是保留后三条性质，减弱第一个条件，即 mE 不必对于所有实数的集合 E 有定义.[⊜] 我们想要 mE 对于尽可能多的集有定义，且要求被 m 定义的集族 $\mathfrak{M}$ 是一个 σ 代数. 因此我们说 m 是一个**可数加性测度**. 若它是一个非负扩充实值函数，其定义域是一个 σ 代数 $\mathfrak{M}$，且我们有 $m(\bigcup E_n)=\sum mE_n$ 对于 $\mathfrak{M}$ 中每个不相交的集合序列 $\langle E_n\rangle$ 成立. 在以下两节我们的目标是构造出一个可数加性测度，其平移不变且具有性质：$mI=l(I)$ 对于每个区间 I 成立.

习题

令 m 为定义在 σ 代数 $\mathfrak{M}$ 上的所有集合的可数加性测度.

1. 若 A 和 B 是 $\mathfrak{M}$ 中的两个集合满足 $A\subset B$，那么 $mA\leqslant mB$. 这个性质称为单调性.
2. 若 $\langle E_n\rangle$ 是 $\mathfrak{M}$ 中的任意集列，则 $m(\bigcup E_n)\leqslant\sum mE_n$. [提示：使用命题 1.2.] 这个性质称为测度的可数次加性.

⊖ 若我们假定连续统假设(每个不可数实数集都能与全体实数组成的集建立一一对应)，那么这样的测度是不存在的.

⊜ 减弱性质(i)并非惟一途径；也可以用较弱的性质——有限加性来替代可数加性的性质(iii). 对于不交有限集列 $\langle E_n\rangle$，我们有 $m(\bigcup E_n)=\sum mE_n$ (见习题 10.21). 另外一种可能是用可数次加性来代替可数加性，我们在下一节所构造的外测度即可满足此性质(见习题 2).

3. 若$\mathfrak{M}$中存在一个集合 A 使得 $mA<\infty$,则 $m\varnothing=0$.

4. 令 nE 当 E 为无限集时等于∞；当 E 为有限集时等于 E 中元素的个数. 证明 n 是可数加性集函数，它具有平移不变性且对于所有实数集有定义. 这个测度称为**计数测度**.

55

3.2　外测度

对于每个实数集 A，考虑覆盖 A 的可数开区间簇$\{I_n\}$，即集簇满足 $A\subset\bigcup I_n$，考虑该集簇所有区间的长度和，由于长度是正数，所以此和惟一确定并且与项的顺序无关. 定义 A 的**外测度**[⊖] m^*A 为所有这些和的下确界，用较简单的记号写为

$$m^*A=\inf_{A\subset\bigcup I_n}\sum l(I_n).$$

从 m^* 的定义即知 $m^*\varnothing=0$，而且若 $A\subset B$，那么 $m^*A\leqslant m^*B$. 此外单点集的外测度为零. 下面我们给出关于外测度的两个命题：

1. 命题　*一个区间的外测度就是它的长度.*

证明　从闭有限区间$[a,b]$开始. 因为对于每个正数 ε 开区间$(a-\varepsilon,b+\varepsilon)$包含$[a,b]$,所以有 $m^*[a,b]\leqslant l(a-\varepsilon,b+\varepsilon)=b-a+2\varepsilon$. 由于 $m^*[a,b]\leqslant b-a+2\varepsilon$ 对于每个正数 ε 成立，即有 $m^*[a,b]\leqslant b-a$，因此仅需证明 $m^*[a,b]\geqslant b-a$. 而这等价于证明若$\{I_n\}$是任意覆盖$[a,b]$的可数开区间簇，则有

$$\sum l(I_n)\geqslant b-a. \tag{1}$$

根据海涅-博雷尔定理，$[a,b]$的任何开覆盖都包含一个有限子覆盖，而有限子簇的长度和不大于原集簇的长度和，所以仅需证明不等式(1)对于覆盖$[a,b]$的有限子簇$\{I_n\}$成立即可. 由于 a 包含于$\bigcup I_n$，那么这些 I_n中必须有一个包含 a，就令这个区间为(a_1,b_1)，有 $a_1<a<b_1$. 若 $b_1\leqslant b$，则 $b_1\in[a,b]$，且由于 $b_1\notin(a_1,b_1)$，因此必有$\{I_n\}$中的区间(a_2,b_2)使得 $b_1\in(a_2,b_2)$;即 $a_2<b_1<b_2$. 依此下去，可从$\{I_n\}$中得到一个序列(a_1,b_1)，…，(a_k,b_k)使得$a_i<b_{i-1}<b_i$.

56

而$\{I_n\}$是一个有限簇，因此这个过程必须中止于某个(a_k,b_k). 但是该过程要中止仅当$b\in(a_k,b_k)$，即若 $a_k<b<b_k$. 所以

$$\begin{aligned}\sum l(I_n)&\geqslant\sum l(a_i,b_i)\\&=(b_k-a_k)+(b_{k-1}-a_{k-1})+\cdots+(b_1-a_1)\\&=b_k-(a_k-b_{k-1})-(a_{k-1}-b_{k-2})\\&\quad-\cdots-(a_2-b_1)-a_1>b_k-a_1,\end{aligned}$$

由于 $a_i<b_{i-1}$. 但 $b_k>b$、$a_1<a$，因而有 $b_k-a_1>b-a$，这就得到$\sum l(I_n)>(b-a)$. 这表明 $m^*[a,b]=b-a$.

若 I 是任意有限区间，则给定 $\varepsilon>0$，存在闭区间 $J\subset I$ 使得 $l(J)>l(I)-\varepsilon$. 因此

⊖ 为将该测度区别于第 12 章所考虑的更一般的外测度，我们称这个测度为勒贝格外测度，根据亨利・勒贝格命名. 由于本章不考虑其他外测度，就将 m^* 简单地称为外测度.

$$l(I)-\varepsilon < l(J) = m^* J \leqslant m^* I \leqslant m^* \bar{I} = l(\bar{I}) = l(I).$$

所以对每个 $\varepsilon>0$ 有

$$l(I)-\varepsilon < m^* I \leqslant l(I),$$

因而 $m^* I=l(I)$.

若 I 是一个无限区间，则给定任意实数 $\Delta>0$，存在闭区间 $J\subset I$ 使得 $l(J)=\Delta$. 因此 $m^* I\geqslant m^* J=l(J)=\Delta$. 由于 $m^* I\geqslant\Delta$ 对于每个 Δ 都成立，所以 $m^* I=\infty=l(I)$. ■

2. 命题　令 $\{A_n\}$ 为可数实数集簇，那么

$$m^*(\bigcup A_n)\leqslant\sum m^* A_n.$$

证明　若集合 A_n 中的某个集具有无限外测度，自然该不等式成立. 若 $m^* A_n$ 有限，则给定 $\varepsilon>0$，存在一个可数开区间簇 $\{I_{n,i}\}_i$ 使得 $A_n\subset\bigcup_i I_{n,i}$ 且 $\sum_i l(I_{n,i})<m^* A_n+2^{-n}\varepsilon$. 现在区间簇 $\{I_{n,i}\}_{n,i}=\bigcup_n\{I_{n,i}\}_i$ 可数，这是因为它是可数个可数集簇的并集，并且它覆盖 $\bigcup A_n$. 因此

$$m^*(\bigcup A_n)\leqslant\sum_{n,i} l(I_{n,i})=\sum_n\sum_i l(I_{n,i})<\sum_n(m^* A_n+\varepsilon 2^{-n})$$
$$=\sum m^* A_n+\varepsilon.$$

57

由于 ε 是任意正数，因而

$$m^*(\bigcup A_n)\leqslant\sum m^* A_n.$$ ■

3. 系　若 A 可数，$m^* A=0$.

4. 系　集合 $[0, 1]$ 不可数.

5. 命题　给定任意集合 A 与任意 $\varepsilon>0$，存在一个开集 O 使得 $A\subset O$ 且 $m^* O\leqslant m^* A+\varepsilon$. 还存在一个 $G\in G_\delta$ 使得 $A\subset G$ 且 $m^* A=m^* G$.

习题

5. 令 A 为 0 与 1 之间的有理数集，且令 $\{I_n\}$ 为覆盖 A 的有限开区间簇，那么 $\sum l(I_n)\geqslant 1$.
6. 证明命题 5.
7. 证明 m^* 平移不变.
8. 证明若 $m^* A=0$，则 $m^*(A\cup B)=m^* B$.

3.3 可测集与勒贝格测度

虽然外测度具有对于每个集合都有定义的优点，但它不是可数加性的. 不过，如果适当地缩小它所定义的集族，它就可以成为可数加性的. 也许使用下面由卡拉泰奥多里所给出的定义是实现这一目标的最好方法：

定义　一个集合 E 称为可测的[⊖]，若对于每个集合 A 有 $m^* A=m^*(A\cap E)+m^*(A\cap\tilde{E})$.

由于总有 $m^* A\leqslant m^*(A\cap E)+m^*(A\cap\tilde{E})$，所以若 E 可测当(且仅当)对每个 A 有 $m^* A\geqslant$

⊖ 目前情形 m^* 为勒贝格外测度，E 是勒贝格可测的. 在第 11 和第 12 章我们将考虑更一般的可测集概念.

$m^*(A\cap E)+m^*(A\cap\widetilde{E})$. 因为可测性的定义关于 E 和 $\widetilde{E}$ 对称，所以只要 E 可测，就有 $\widetilde{E}$ 可测. 显然空集$\varnothing$和由所有实数构成的集 $\mathbf{R}$ 可测.

58

6. 引理　若 $m^*E=0$，则 E 可测.

证明　令 A 为任意集合，那么 $A\cap E\subset E$，因而 $m^*(A\cap E)\leqslant m^*E=0$，$A\supset A\cap\widetilde{E}$，所以

$$m^*A\geqslant m^*(A\cap\widetilde{E})=m^*(A\cap\widetilde{E})+m^*(A\cap E),$$

因此 E 可测. ■

7. 引理　若 E_1 和 E_2 可测，则 $E_1\cup E_2$ 可测.

证明　令 A 为任意集合. 由于 E_2 可测，有

$$m^*(A\cap\widetilde{E}_1)=m^*(A\cap\widetilde{E}_1\cap E_2)+m^*(A\cap\widetilde{E}_1\cap\widetilde{E}_2),$$

且因为 $A\cap(E_1\cup E_2)=[A\cap E_1]\cup[A\cap E_2\cap\widetilde{E}_1]$，

我们有

$$m^*(A\cap[E_1\cup E_2])\leqslant m^*(A\cap E_1)+m^*(A\cap E_2\cap\widetilde{E}_1).$$

因此根据 E_1 的可测性

$$\begin{aligned}m^*(A\cap[E_1\cup E_2])+m^*(A\cap\widetilde{E}_1\cap\widetilde{E}_2)&\leqslant m^*(A\cap E_1)\\&\quad+m^*(A\cap E_2\cap\widetilde{E}_1)+m^*(A\cap\widetilde{E}_1\cap\widetilde{E}_2)\\&=m^*(A\cap E_1)+m^*(A\cap\widetilde{E}_1)=m^*A,\end{aligned}$$

既然$\sim(E_1\cup E_2)=\widetilde{E}_1\cap\widetilde{E}_2$，这就表明 $E_1\cup E_2$ 可测. ■

8. 系　可测集族$\mathfrak{M}$是一个集合代数.

9. 引理　令 A 为任意集合，E_1，…，E_n是一个有限不交可测集的序列，那么

$$m^*\left(A\cap\left[\bigcup_{i=1}^n E_i\right]\right)=\sum_{i=1}^n m^*(A\cap E_i).$$

证明　通过对 n 归纳来证明该引理. 对于 $n=1$ 引理显然成立，假定对 $n-1$ 个集合 E_i 它也成立. 由于这些 E_i是不相交的集合，所以

$$A\cap\left[\bigcup_{i=1}^n E_i\right]\cap E_n=A\cap E_n$$

与

$$A\cap\left[\bigcup_{i=1}^n E_i\right]\cap\widetilde{E}_n=A\cap\left[\bigcup_{i=1}^{n-1} E_i\right].$$

59

根据对 $n-1$ 个集合引理成立的假设，E_n的可测性蕴涵

$$\begin{aligned}m^*\left(A\cap\left[\bigcup_{i=1}^n E_i\right]\right)&=m^*(A\cap E_n)+m^*\left(A\cap\left[\bigcup_{i=1}^{n-1} E_i\right]\right)\\&=m^*(A\cap E_n)+\sum_{i=1}^{n-1}m^*(A\cap E_i)\end{aligned}$$ ■

10. 定理　可测集簇$\mathfrak{M}$是一个σ代数：即可测集的补集是可测的，可数可测集簇的并集(与交集)是可测的. 此外，外测度等于零的集合是可测的.

证明　已知$\mathfrak{M}$是一个集代数，仅需证明若一个集合 E 是可数可测集簇之并，则它是可测

的．根据命题 1.2，这样的 E 必是两两不相交的可测集序列 $\langle E_n \rangle$ 之并．令 A 为任意集，且令 $F_n = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$，那么 F_n 可测，$\widetilde{F}_n \supset \widetilde{E}$．因此

$$m^* A = m^*(A \cap F_n) + m^*(A \cap \widetilde{F}_n) \geqslant m^*(A \cap F_n) + m^*(A \cap \widetilde{E}).$$

由引理 9，

$$m^*(A \cap F_n) = \sum_{i=1}^{n} m^*(A \cap E_i).$$

故

$$m^* A \geqslant \sum_{i=1}^{n} m^*(A \cap E_i) + m^*(A \cap \widetilde{E}).$$

由于上面不等式的左侧与 n 无关，根据 m^* 的可数次加性，有

$$m^* A \geqslant \sum_{i=1}^{\infty} m^*(A \cap E_i) + m^*(A \cap \widetilde{E})$$

$$\geqslant m^*(A \cap E) + m^*(A \cap \widetilde{E})$$ ■

11. 引理 区间 (a, ∞) 可测．

证明 令 A 为任意集，$A_1 = A \cap (a, \infty)$，$A_2 = A \cap (-\infty, a]$，那么必须证明 $m^* A_1 + m^* A_2 \leqslant m^* A$．若 $m^* A = \infty$，就没什么可证的了．若 $m^* A < \infty$，给定 $\varepsilon > 0$，则存在开区间簇 $\{I_n\}$，它构成覆盖 A 的可数集簇 且 [60]

$$\sum l(I_n) \leqslant m^* A + \varepsilon.$$

令 $I'_n = I_n \cap (a, \infty)$，$I''_n = I_n \cap (-\infty, a]$，那么 I'_n 与 I''_n 是区间（或空集）且

$$l(I_n) = l(I'_n) + l(I''_n) = m^* I'_n + m^* I''_n.$$

由于 $A_1 \subset \bigcup I'_n$，我们有

$$m^* A_1 \leqslant m^*(\bigcup I'_n) \leqslant \sum m^* I'_n,$$

且由于 $A_2 \subset \bigcup I''_n$，还有

$$m^* A_2 \leqslant m^*(\bigcup I''_n) \leqslant \sum m^* I''_n.$$

因此

$$m^* A_1 + m^* A_2 \leqslant \sum (m^* I'_n + m^* I''_n)$$

$$\leqslant \sum l(I_n) \leqslant m^* A + \varepsilon.$$

但是 ε 为任意正数，所以必有 $m^* A_1 + m^* A_2 \leqslant m^* A$． ■

12. 定理 每个博雷尔集都可测，特别是每个开集与每个闭集也都可测．

证明 因为可测集簇 $\mathfrak{M}$ 是一个 σ 代数，对于任何 a 有 $(-\infty, a] = \sim(a, \infty)$，因此 $(-\infty, a]$ 可测．由于

$$(-\infty, b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(-\infty, b - \frac{1}{n}\right],$$

所以 $(-\infty, b)$ 可测．因此每个开区间 $(a, b) = (-\infty, b) \cap (a, \infty)$ 可测．但每个开集都是可

数个开区间的并集且因此必须可测，那么$\mathfrak{M}$就是包含开集的σ代数且因此必须包含博雷尔集族$\mathcal{B}$，这是由于$\mathcal{B}$是含有开集的最小σ代数. [注意：定理也可从事实$\mathfrak{M}$是包含形如(a, ∞)区间的σ代数与事实$\mathcal{B}$是包含所有这些区间的最小σ代数直接得出.] ■

61 若E是可测集，定义勒贝格测度mE为E的外测度，因此集函数m是由m^*限制在可测集族$\mathfrak{M}$上所得到的. 勒贝格测度的两个重要性质可由以下命题概括：

13. 命题 令$\langle E_i \rangle$为可测集序列，那么

$$m(\bigcup E_i) \leqslant \sum mE_i.$$

若集合E_n两两不相交，则

$$m(\bigcup E_i) = \sum mE_i.$$

证明 上面不等式不过是命题2所给出的m^*的次加性的重新叙述. 若$\langle E_i \rangle$是不相交可测集的有限序列，令$A=\mathbf{R}$那么引理9蕴涵

$$m(\bigcup E_i) = \sum mE_i.$$

因而m是有限加性的. 令$\langle E_i \rangle$为两两不相交的可测集的无限序列，那么

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \supset \bigcup_{i=1}^{n} E_i,$$

因而

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \geqslant m\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} mE_i.$$

由于该不等式左边与n无关，所以

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \geqslant \sum_{i=1}^{\infty} mE_i.$$

故而反向不等式即由可数次加性得到，有

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} mE_i.$$ ■

14. 命题 令$\langle E_n \rangle$为无限递减的可测集序列，即对于每个n有$E_{n+1} \subset E_n$，令mE_1有限，那么

62

$$m\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \lim_{n \to \infty} mE_n.$$

证明 令$E = \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i$，$F_i = E_i \sim E_{i+1}$，那么

$$E_1 \sim E = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i,$$

且集合F_i两两不相交. 因此

$$m(E_1 \sim E) = \sum_{i=1}^{\infty} mF_i = \sum_{i=1}^{\infty} m(E_i \sim E_{i+1}).$$

但$mE_1 = mE + m(E_1 \sim E)$，$mE_i = mE_{i+1} + m(E_i \sim E_{i+1})$，由于$E \subset E_1$与$E_{i+1} \subset E_i$. 因为$mE_i \leqslant$

$mE_1<\infty$，因此有 $m(E_1\sim E)=mE_1-mE$，$m(E_i\sim E_{i+1})=mE_i-mE_{i+1}$. 因此

$$mE_1-mE=\sum_{i=1}^{\infty}(mE_i-mE_{i+1})$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(mE_i-mE_{i+1})$$
$$=\lim_{n\to\infty}(mE_1-mE_n)$$
$$=mE_1-\lim_{n\to\infty}mE_n.$$

而 $mE_1<\infty$，所以

$$mE=\lim_{n\to\infty}mE_n.$$

■

以下命题用多种方式表明可测集几乎就是一个完美的集合，有关证明留给读者(习题 13).

15. 命题 令 E 为给定集，那么以下 5 个陈述等价：

i. E 可测.

ii. 给定 $\varepsilon>0$，存在一个开集 $O\supset E$ 满足 $m^*(O\sim E)<\varepsilon$.

iii. 给定 $\varepsilon>0$，存在一个闭集 $F\subset E$ 满足 $m^*(E\sim F)<\varepsilon$.

iv. 存在一个 G 属于 G_δ 满足 $E\subset G$，$m^*(G\sim E)=0$.

v. 存在一个 F 属于 F_σ 满足 $F\subset E$，$m^*(E\sim F)=0$.

若 m^*E 有限，以上陈述都等价于：

vi. 给定 $\varepsilon>0$，存在开区间的有限并集 U 使得

$$m^*(U\Delta E)<\varepsilon.$$

63

习题

9. 若 E 是可测集，则 E 的每个平移 $E+y$ 也是可测集.

10. 若 E_1 和 E_2 是可测的，则

$$m(E_1\cup E_2)+m(E_1\cap E_2)=mE_1+mE_2.$$

11. 证明命题 14 中的条件 $mE_1<\infty$是必要的：给出一个递减的可测集列$\langle E_n\rangle$满足$\varnothing=\bigcap E_n$且对每个 n，$mE_n=\infty$.

12. 令 $\langle E_i\rangle$ 为不相交的可测集序列且 A 是任意集，那么 $m^*\left(A\cap\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}m^*(A\cap E_i)$.

13. 证明命题 15. [提示：

    a. 证明若 $m^*E<\infty$，(i)⇒(ii)⇔(vi)(参见命题 5).

    b. 用(a)证明对于任意集合 E，(i)⇒(ii)⇒(iv)⇒(i).

    c. 用(b)证明(i)⇒(iii)⇒(v)⇒(i).]

14. a. 证明康托尔三分集(习题 2.37)的测度为零.

    b. 令 F 为[0, 1]的子集，它的构造方式几乎等同于康托尔三分集，除了在第 n 步将所去掉的区间长度换为 $\alpha 3^{-n}$ 外，其中 $0<\alpha<1$，因此 F 是一个闭集，$\tilde{F}$ 在[0, 1]稠密且

$mF=1-\alpha$. 这样的集 F 称为一个广义康托尔集.

*3.4　一个不可测集

我们将说明不可测集的存在性. 若 x 和 y 是$[0,1)$内的实数，定义 x 与 y 的模 1 和为 $x+y$（若 $x+y<1$）和 $x+y-1$（若 $x+y\geq 1$）. 将 x 与 y 的模 1 和表示为 $x\dot{+}y$，那么$\dot{+}$就是一个交换与结合的运算它将每对$[0,1)$内的数映射到$[0,1)$. 若将每个 $x\in[0,1)$对应于角 $2\pi x$，则模 1 加法对应于角度相加. 若 E 是$[0,1)$的一个子集，则定义集合 E 模 1 的平移为集合 $E\dot{+}y=\{z: z=x\dot{+}y$ 对某个 $x\in E\}$. 若将模 1 加法作为角度相加，则模 1 平移 y 对应于角度旋转 $2\pi y$. 以下引理表明勒贝格测度在模 1 平移下不变.

64

16. 引理　令 $E\subset[0,1)$为可测集，那么对于每个 $y\in[0,1)$集合 $E\dot{+}y$ 可测且 $m(E\dot{+}y)=mE$.

证明　令 $E_1=E\cap[0,1-y)$，$E_2=E\cap[1-y,1)$，那么 E_1 和 E_2是不相交的可测集，而其并集为 E，因而

$$mE=mE_1+mE_2.$$

由于 $E_1\dot{+}y=E_1+y$，因而 $E_1\dot{+}y$ 可测且有 $m(E_1\dot{+}y)=mE_1$，这是因为 m 平移不变. 同样 $E_2\dot{+}y=E_2+(y-1)$，因而 $E_2\dot{+}y$ 可测且 $m(E_2\dot{+}y)=mE_2$. 但是 $E\dot{+}y=(E_1\dot{+}y)\cup(E_2\dot{+}y)$并且集合 $E_1\dot{+}y$ 与 $E_2\dot{+}y$ 是不相交的可测集，因此 $E\dot{+}y$ 可测且

$$\begin{aligned} m(E\dot{+}y) &= m(E_1\dot{+}y)+m(E_2\dot{+}y) \\ &= mE_1+mE_2 \\ &= mE. \end{aligned}$$

■

下面来定义一个不可测集. 若 $x-y$ 是有理数，即说 x 和 y 是等价的并写为 $x\sim y$. 这是一个等价关系，它将$[0,1)$划分为等价类，即同类的不同元素仅相差一个有理数，而不同类的元素相差一个无理数. 根据选择公理存在一个集合 P 恰包含每个等价类的一个元素. 令$\langle r_i\rangle_{i=0}^{\infty}$为$[0,1)$上有理数的一个列举，其中 $r_0=0$，定义 $P_i=P\dot{+}r_i$. 那么 $P_0=P$. 令 $x\in P_i\cap P_j$. 那么 $x=p_i\dot{+}r_i=p_j\dot{+}r_j$，其中 p_i和 p_j 都属于 P. 但 $p_i-p_j=r_j-r_i$是有理数，因此 $p_i\sim p_j$. 由于 P 中仅有来自每个等价类的一个元素，所以必有 $i=j$. 这意味着，若 $i\neq j$，$P_i\cap P_j=\varnothing$ 即$\langle P_i\rangle$是两两不相交的集合序列. 另一方面，$[0,1)$中的每个实数 x 均属于某个等价类，因而与 P 的一个元素等价. 但 x 仅与 P 的元素相差一个有理数 r_i，那么 $x\in P_i$. 因此$\bigcup P_i=[0,1)$. 由于 P_i是 P 模 1 的一个平移，所以若 P 可测，P_i就可测，而且其测度与 P 的测度一致. 但是若如此，

$$m[0,1)=\sum_{i=1}^{\infty}mP_i=\sum_{i=1}^{\infty}mP,$$

上式右边等于零或无限，这依赖于 mP 为零或正. 但由于 $m[0,1)=1$，所以这是不可能的. 因此 P 不可能可测.

65

虽然以上有关 P 的不可测性的证明方法是反证法，但应该注意到(直到最后一句)，我们

并没有用到除平移不变与可数加性之外的勒贝格测度的性质．因此上述证明也给出了以下定理的直接证明：

17. 定理 若 m 是一个定义在包含集合 P 的 σ 代数上的可数加性的平移不变测度，则 $m[0, 1)$ 或者等于零或者无限．

P 的关于任何平移不变、可数加性且满足 $m[0, 1)$ 等于 1 的测度 m 的不可测性可由逆否关系得到．

习题

15. 证明若 E 可测且 $E \subset P$，则 $mE=0$．[提示：令 $E_i = E \dot{+} r_i$，那么 $\langle E_i \rangle$ 是一个不相交的可测集序列且 $m\,E_i = m\,E$．因此 $\sum m\,E_i = m \bigcup E_i \leqslant m[0, 1]$．]
16. 证明，若 A 是任意使得 $m^* A > 0$ 的集合，则存在一个不可测集 $E \subset A$．[提示：若 $A \subset (0, 1)$，令 $E_i = A \cap P_i$．E_i 的可测性表明 $mE_i = 0$，而 $\sum m^* E_i \geqslant m^* A > 0$．]
17. a. 给出一个 $\langle E_i \rangle$ 是不相交集列的例子且
$$m^*(\bigcup E_i) < \sum m^* E_i.$$
    b. 给出满足以下条件集列 $\langle E_i \rangle$ 的一个例子：$E_i \supset E_{i+1}$，$m^* E_i < \infty$，且 $m^*(\bigcap E_i) < \lim m^* E_i$．

3.5 可测函数

既然不是所有的集合都可测，那么一个至关重要的问题是如何知道在某种构造下自然产生的集合是否可测．若从一个函数 f 出发，以下命题列出了由它产生的最重要的集合：

18. 命题 令 f 为扩充实值函数，其定义域可测，那么以下陈述等价：

i. 对于每个实数 α 集合 $\{x: f(x) > \alpha\}$ 可测．

ii. 对于每个实数 α 集合 $\{x: f(x) \geqslant \alpha\}$ 可测．

iii. 对于每个实数 α 集合 $\{x: f(x) < \alpha\}$ 可测．

iv. 对于每个实数 α 集合 $\{x: f(x) \leqslant \alpha\}$ 可测．

这些陈述蕴涵了

v. 对于每个扩充实数 α 集合 $\{x: f(x) = \alpha\}$ 可测．

66

证明 令 f 的定义域为 D．我们有(i)⇒(iv)，这是由于 $\{x: f(x) \leqslant \alpha\} = D \sim \{x: f(x) > \alpha\}$ 且两个可测集的差集可测．类似地，(iv)⇒(i)和(ii)⇔(iii)．现在(i)⇒(ii)，这是由于 $\{x: f(x) \geqslant \alpha\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x: f(x) > \alpha - 1/n\}$，而且可测集列的交集可测．类似地，由于 $\{x: f(x) > \alpha\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x: f(x) \geqslant \alpha + 1/n\}$ 且可测集列的并集可测，则有(ii)⇒(i)．这就表明前 4 个陈述等价．若 α 是一个实数，$\{x: f(x) = \alpha\} = \{x: f(x) \geqslant \alpha\} \cap \{x: f(x) \leqslant \alpha\}$，因而对于 α 是一个实数，(ii)和(iv)⇒(v)．由于
$$\{x: f(x) = \infty\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x: f(x) \geqslant n\},$$

所以对于 $\alpha=\infty$，(ii)⇒(v). 类似地，对于 $\alpha=-\infty$，(iv)⇒(v)，因而有(ii) & (iv)⇒(v). ■

定义 扩充实值函数 f 称为(勒贝格)可测，若它的定义域可测且满足命题 18 前 4 个陈述的任一个.

因此若限定可测函数，那么与之相联系的最重要集合是可测的. 应该注意到(具有可测定义域的)连续函数可测，当然阶梯函数可测. 若 f 是可测函数，E 是 f 的定义域的可测子集，将 f 限定于 E 所得到的函数也是可测的. 从以下命题可知对可测函数实施某些运算后仍然得到可测函数.

19. 命题 令 c 是一个常数且 f 和 g 是定义在同一定义域的两个可测实值函数. 那么函数 $f+c$、cf、$f+g$、$g-f$ 和 fg 也是可测的.

证明 用命题 18 的条件(iii)，那么

67

$$\{x: f(x)+c<\alpha\}=\{x: f(x)<\alpha-c\},$$

因而当 f 可测时 $f+c$ 可测. 类似的讨论表明 cf 也可测.

若 $f(x)+g(x)<\alpha$，那么 $f(x)<\alpha-g(x)$，并且根据阿基米德公理的系可知，存在一个有理数 r 使得

$$f(x)<r<\alpha-g(x).$$

因此

$$\{x: f(x)+g(x)<\alpha\}=\bigcup_r(\{x: f(x)<r\}\cap\{x: g(x)<\alpha-r\}).$$

因为有理数集是可数的，那么该集合可测，因而 $f+g$ 可测. 由于当 g 可测 $-g=(-1)g$ 可测，所以 $f-g$ 可测.

由于对于 $\alpha\geqslant 0$

$$\{x: f^2(x)>\alpha\}=\{x: f(x)>\sqrt{\alpha}\}\cup\{x: f(x)<-\sqrt{\alpha}\}$$

对于 $\alpha<0$

$$\{x: f^2(x)>\alpha\}=D$$

所以函数 f^2 可测. 其中 D 是 f 的定义域. 因此

$$fg=\frac{1}{2}[(f+g)^2-f^2-g^2]$$

是可测的. ■

我们想将命题 19 推广到扩充实值函数 f 和 g. 遗憾的是，在形如 $\infty-\infty$ 的点 $f+g$ 没有定义. 然而，fg 总是可测的. 若在 $f+g$ 没有定义的这些点对 $f+g$ 取固定的值，$f+g$ 也可测. 还有：假定 $f+g$ 没有定义的这些点是测度为零的集合，那么无论对 $f+g$ 取什么值 $f+g$ 都可测.（见习题 22.）

20. 定理 令 $\langle f_n\rangle$ 为可测函数的序列(具有相同的定义域)，那么函数 $\sup\{f_1, \cdots, f_n\}$，$\inf\{f_1, \cdots, f_n\}$，$\sup\{f_n: n\}$，$\inf\{f_n: n\}$，$\overline{\lim} f_n$ 与 $\underline{\lim} f_n$ 都是可测的.

证明 若 h 是由 $h(x)=\sup\{f_1(x), \cdots, f_n(x)\}$ 定义的函数，则 $\{x: h(x)>\alpha\}=$

68

$\bigcup_{i=1}^{n}\{x: f_i(x)>\alpha\}$. 因此 f_i 的可测性蕴涵 h 的可测性. 类似地，若定义 g 为 $g(x)=\sup f_n(x)$，

那么$\{x: g(x)>\alpha\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{x: f_n(x)>\alpha\}$，因而 g 可测. 对于 inf 也可建立相应的命题讨论. 由于$\overline{\lim} f_n=\inf_n \sup_{k\geqslant n} f_k$，有$\overline{\lim} f_n$可测，类似地$\underline{\lim} f_n$可测. ■

我们说一个性质**几乎处处**(简写为 a. e.)成立，指的是那些使该性质不成立的点集的测度为零. 因此特别地 $f=g$ a. e.，若 f 和 g 有相同的定义域且 $m\{x: f(x)\neq g(x)\}=0$. 类似地，我们说 f_n几乎处处收敛于 g：若存在一个零测度集 E 使得 $f_n(x)$在每个不属于 E 的点 x 收敛于 $g(x)$. 下面的命题是等式 a. e. 成立的一个推论：

21. 命题　若 f 是一个可测函数且 $f=g$ a. e.，那么 g 可测.

证明　令 E 为集合$\{x: f(x)\neq g(x)\}$. 根据假设 $mE=0$，有

$$\{x:g(x)>\alpha\}=[\{x:f(x)>\alpha\}\cup\{x\in E:g(x)>\alpha\}] \sim\{x\in E:g(x)\leqslant\alpha\}.$$

因为 f 是可测函数，所以上式右边的第一个集合可测. 而右边的最后两个集合可测，是由于它们是 E 的子集且 $mE=0$. 因此对于每个 $\alpha\{x: g(x)>\alpha\}$可测，故而 g 可测. ■

由下面的命题可知一个可测函数“几乎”就是一个连续函数. 该命题的证明留给读者(参见习题 23).

22. 命题　令 f 为定义在区间$[a, b]$上的可测函数，假定它只在零测度集上取$+\infty$或$-\infty$值，那么给定 $\varepsilon>0$，就可以找到一个阶梯函数 g 和一个连续函数 h 使得

$$|f-g|<\varepsilon \text{ 且 } |f-h|<\varepsilon$$

69

在除去测度小于 ε 的集合上成立；即 $m\{x: |f(x)-g(x)|\geqslant\varepsilon\}<\varepsilon$，且 $m\{x: |f(x)-h(x)|\geqslant\varepsilon\}<\varepsilon$. 若还有 $m\leqslant f\leqslant M$，那么还可以选取函数 g 和 h 使得 $m\leqslant g\leqslant M$ 且 $m\leqslant h\leqslant M$.

若 A 是任意集合，定义集合 A 的**特征函数** χ_A 为函数

$$\chi_A(x)=\begin{cases}1 & \text{若 } x\in A\\ 0 & \text{若 } x\notin A.\end{cases}$$

函数 χ_A 是可测的当且仅当集合 A 是可测的. 因此不可测集的存在性蕴涵着不可测函数的存在性.

一个实值函数 φ 称为**简单**的当且仅当它是可测的且仅取有限个值. 若 φ 是简单的且具有值 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$，那么 $\varphi=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\chi_{A_i}$，其中 $A_i=\{x:\varphi(x)=\alpha_i\}$. 两个简单函数的和、积、差还是简单函数.

习题

18. 证明命题 18 中的(v)不蕴涵(iv). 构造函数 f 使得$\{x: f(x)>0\}=E$，E 是一个给定的不可测集，且 f 一次至多取到每一个值.
19. 令 D 为实数的稠密集，即 D 是一个实数集且每个区间包含 D 的一个元素. 令 f 为 $\mathbf{R}$ 上的扩充实值函数对于每个 $\alpha\in D$ 使得$\{x: f(x)>\alpha\}$可测，那么 f 可测.
20. 证明两个简单函数的和与积是简单的. 证明

$$\chi_{A\cap B}=\chi_A\cdot\chi_B$$

$$\chi_{A\cup B}=\chi_A+\chi_B-\chi_A\cdot\chi_B$$

$$\chi_{\tilde{A}}=1-\chi_A.$$

21. a. 令 D 与 E 为可测集，f 为定义在 $D\cup E$ 上的函数. 证明 f 是可测的当且仅当它在 D 与 E 的限制是可测的.

 b. 令 f 为具有可测定义域 D 的函数. 证明 f 可测当且仅当函数 g：$g(x)=f(x)$，$x\in D$ 且 $g(x)=0$，$x\notin D$ 可测.

[70]

22. a. 令 f 为具有可测定义域 D 的扩充实值函数，且令 $D_1=\{x: f(x)=\infty\}$，$D_2=\{x: f(x)=-\infty\}$，那么 f 可测当且仅当 D_1 和 D_2 可测且 f 限制在 $D\sim(D_1\cup D_2)$ 可测.

 b. 证明两个可测的扩充实值函数的乘积可测.

 c. 令 f 和 g 为可测的扩充实值函数且 α 是一个固定的数，若只要出现 $\infty-\infty$ 或 $-\infty+\infty$ 的形式就定义 $f+g$ 为 α，那么 $f+g$ 可测.

 d. 令 f 和 g 为可测的扩充实值函数，它们几乎处处有限，那么无论 $f+g$ 在形如 $\infty-\infty$ 时取何值，它都可测.

23. 通过建立以下引理证明命题 22：

 a. 令 f 为 $[a, b]$ 上的可测函数，并仅在零测度集取 $+\infty$ 或 $-\infty$，给定 $\varepsilon>0$，存在一个 M 使得 $|f|\leqslant M$，在除去测度小于 $\varepsilon/3$ 的集合上成立.

 b. 令 f 为 $[a, b]$ 上的可测函数，给定 $\varepsilon>0$ 和 M，存在简单函数 φ 使得 $|f(x)-\varphi(x)|<\varepsilon$ 在除去 $|f(x)|\geqslant M$ 的 x 处成立. 若 $m\leqslant f\leqslant M$，那么可以取 φ 使得 $m\leqslant\varphi\leqslant M$.

 c. 令 φ 为 $[a, b]$ 上的简单函数，存在 $[a, b]$ 上的阶梯函数 g 使得 $g(x)=\varphi(x)$ 在除去一个测度小于 $\varepsilon/3$ 的集合外成立. [提示：用命题 15.]若 $m\leqslant\varphi\leqslant M$，那么可以取 g 使得 $m\leqslant g\leqslant M$.

 d. 给定 $[a, b]$ 上的阶梯函数 g，则存在一个连续函数 h 使得除去一个测度小于 $\varepsilon/3$ 的集合 $g(x)=h(x)$. 若 $m\leqslant g\leqslant M$，我们可以取 h 使得 $m\leqslant h\leqslant M$.

24. 令 f 可测且 B 为博雷尔集，那么 $f^{-1}[B]$ 是一个可测集. [提示：使 $f^{-1}[E]$ 可测的集类是 σ 代数.]

25. 证明若 f 是可测实值函数且 g 是定义在 $(-\infty, \infty)$ 上的连续函数，那么 $g\circ f$ 可测.

26. 博雷尔可测性. 一个函数 f 称为是**博雷尔可测的**，若对于每个 α，集合 $\{x: f(x)>\alpha\}$ 是一个博雷尔集. 证明用“博雷尔集”代替“可测集”，“博雷尔可测”代替“勒贝格可测”，命题 18 和 19 以及定理 20 仍然成立. 每个博雷尔可测的函数都是勒贝格可测. 若 f 是博雷尔可测的且 B 是博雷尔集，则 $f^{-1}[B]$ 是一个博雷尔集. 若 f 和 g 都是博雷尔可测的，则 $f\circ g$ 是博雷尔可测的. 若 f 博雷尔可测且 g 勒贝格可测，则 $f\circ g$ 是勒贝格可测的.

27. 若用任意集合的 σ 代数 $\mathfrak{A}$ 来代替博雷尔集类 $\mathcal{B}$，请问有多少个前面的问题可以研究.

[71]

28. 令 f_1 为康托尔三分函数(参见习题 2.48)，定义 $f(x)=f_1(x)+x$.

 a. 证明 f 是一个从 $[0, 1]$ 到 $[0, 2]$ 上的同胚映射.

 b. 证明 f 将康托尔集映上测度等于 1 的集合 F.

 c. 令 $g=f^{-1}$. 证明存在一个可测集 A 使得 $g^{-1}[A]$ 不可测.

d. 给出一个连续函数 g 和可测函数 h 使得 $h\circ g$ 不可测的例子，并与习题 25 和 26 相对比.

e. 证明存在非博雷尔集的可测集.

3.6 李特尔伍德的三个原理

谈到实变量函数的理论，李特尔伍德说到[⊖]“所要求的最广泛的知识并非像有时所设想的那么多. 三个原理大致可表述如下：每个(可测)集接近于区间的有限并集；每个[可测]函数接近于连续函数；每个收敛的[可测]函数序列接近于一致收敛的函数序列. 大部分[理论]的结果是这些思想的相当直观的应用. 在遇到需要处理实变函数理论的问题时，学生最需要掌握的就是这三个原理. 若其中一个原理显然可以解决一个十分真实的问题，那么自然要问这个‘接近’是否足够，而实际上对于一个问题一般是可以解决的.”

我们已经遇到过两个李特尔伍德原理：由命题 15 给出的第一原理的多种版本. 命题 22 给出的第二原理的一个版本，习题 31 给出的另一版本，习题 4.15 和命题 6.8 给出的第三个版本. 以下命题给出第三原理的一种版本. 叶果洛夫定理给出了稍强形式的版本，(习题 30)但一般会发现这个弱形式已足够.

23. 命题 令 E 为具有有限测度的可测集，且 $\langle f_n\rangle$ 是定义在 E 上的可测函数序列. 令 f 为实值函数使得对于每个 x 有 $f_n(x)\to f(x)$，那么，给定 $\varepsilon>0$ 与 $\delta>0$，则存在一个可测集 $A\subset E$ 满足 $mA<\delta$ 和一个整数 N 使得对所有 $x\notin A$ 和所有 $n\geqslant N$，

72

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon.$$

证明 令

$$G_n=\{x\in E:|f_n(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon\},$$

且设

$$E_N=\bigcup_{n=N}^{\infty}G_n=\{x\in E:|f_n(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon \text{ 对某个 } n\geqslant N \text{ 成立}\}.$$

我们有 $E_{N+1}\subset E_N$，且对于每个 $x\in E$ 必须存在一个 E_N 使得 x 不属于它，这是由于 $f_n(x)\to f(x)$. 因此 $\bigcap E_N=\varnothing$，因而根据命题 14，$\lim mE_N=0$. 所以给定 $\delta>0$，存在 N 使得 $mE_N<\delta$；即

$$m\{x\in E:|f_n(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon \text{ 对于某个 } n\geqslant N\}<\delta.$$

若将 E_N 记为 A，那么 $mA<\delta$ 并且

$$\tilde{A}=\{x\in E:|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon \text{ 对于所有 } n\geqslant N \text{ 成立}\}.$$ ■

若按命题的假设，对于每个 x，有 $f_n(x)\to f(x)$，则说序列 $\langle f_n\rangle$ 在 E 上**逐点地**收敛于 f. 若存在 E 的子集 B，满足 $mB=0$ 使得 $f_n\to f$ 在 $E\sim B$ 逐点成立，就说在 E 上 $f_n\to f$ a.e.. 下面是对最后命题的平凡修改：

24. 命题 令 E 为有限测度的可测集，且 $\langle f_n\rangle$ 是在 E 上 a.e. 收敛到实值函数 f 的可测函数序列，那么，给定 $\varepsilon>0$ 与 $\delta>0$，存在一个集合 $A\subset E$ 满足 $mA<\delta$ 和一个 N 使得对所有的 $x\notin A$ 与所有的 $n\geqslant N$，

⊖ Littlewood[20]，26 页.

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon.$$

习题

29. 给出一个例子说明在命题 23 中必须要求 $mE<\infty$.

30. 证明叶果洛夫定理：若 f 为可测函数序列且在有限测度的可测集 E 上 a. e. 收敛到实值函数 f，则给定 $\eta>0$，存在一个子集 $A\subset E$ 满足 $mA<\eta$ 使得在 $E\sim A$ 上 f_n 一致收敛于 f. [提示：令 $\varepsilon_n=1/n$ 与 $\delta_n=2^{-n}\eta$ 反复运用命题 24.]

[73]

31. 证明鲁金定理：令 f 为定义在区间 $[a, b]$ 上的可测实值函数. 给定 $\delta>0$，那么存在 $[a, b]$ 上的连续函数 φ 使得 $m\{x: f(x)\neq\varphi(x)\}<\delta$. 请问对于区间 $(-\infty, \infty)$ 有同样的结论吗? [提示：运用叶果洛夫定理、命题 15、命题 22 和习题 2.40.]

32. 证明将命题 23 的整变量 n 换为实变量 t，那么该命题就不一定正确；即构造一族 $[0, 1]$ 上的可测实值函数 $\langle f_t\rangle$ 使得对于每个 x 有 $\lim\limits_{t\to 0} f_t(x)=0$，但对于某个 $\delta>0$ 只有 $m^*\{x: f_t(x)>1/2\}>\delta$. 提示：令 P_i 为第 3.4 节中所出现的集合. 对于 $2^{-i-1}\leqslant t<2^{-i}$，定义 f_t 为

$$f_t(x)=\begin{cases}1 & \text{若 } x\in P_i \text{ 和 } x=2^{i+1}t-1\\ 0 & \text{否则.}\end{cases}$$

[74]

第 4 章　勒贝格积分

4.1　黎曼积分

首先回顾与黎曼积分有关的一些定义．令 f 为定义在闭区间$[a, b]$上的有界实值函数且令

$$a=\xi_0<\xi_1<\cdots<\xi_n=b$$

为$[a, b]$的一个分划．对于每个分划我们定义和式

$$S=\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\xi_{i-1})M_i$$

与

$$s=\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\xi_{i-1})m_i,$$

其中

$$M_i=\sup_{\xi_{i-1}<x\leqslant\xi_i}f(x),\quad m_i=\inf_{\xi_{i-1}<x\leqslant\xi_i}f(x).$$

接着定义 f 的黎曼上积分为

$$R\overline{\int_a^b}f(x)\,\mathrm{d}x=\inf S$$

这里下确界取自于$[a, b]$所有可能的分划．类似地，我们定义 f 的下积分如下：

$$R\underline{\int_a^b}f(x)\,\mathrm{d}x=\sup s.$$

上积分总是不小于下积分．若它们相等，则称 f *黎曼可积*，并称这个共同值为 f 的黎曼积分．我们将 f 的黎曼积分表示为

$$R\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

以区别后面所要考虑的勒贝格积分．

给定$[a, b]$的某个分划和某个常数集 c_i，**阶梯函数** ψ 是指

$$\psi(x)=c_i,\quad \xi_{i-1}<x<\xi_i.$$

在实践中对于任何人所定义的积分都有

$$\int_a^b\psi(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{i=1}^{n}c_i(\xi_i-\xi_{i-1}).$$

记住这一点即可看到对所有阶梯函数 $\psi(x)\geqslant f(x)$，有

$$R\overline{\int_a^b}f(x)\,\mathrm{d}x=\inf\int_a^b\psi(x)\,\mathrm{d}x$$

类似地，对所有阶梯函数 $\varphi(x)\leqslant f(x)$，有

$$R\underline{\int_a^b}f(x)\,\mathrm{d}x=\sup\int_a^b\varphi(x)\,\mathrm{d}x$$

习题

1. a. 证明若 $f(x)=\begin{cases}0, & x\text{ 为无理数}\\ 1, & x\text{ 为有理数}\end{cases}$，则

76

$$R\overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x = b-a \quad \text{且} \quad R\underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x = 0.$$

b. 构造一个非负黎曼可积的函数序列 $\langle f_n\rangle$，使得 f_n 单调递增趋于 f. 请问如果交换积分与取极限过程的次序会得出什么样的结论？

4.2 有限测度集上的有界函数的勒贝格积分

上节的问题 1 已暴露出黎曼积分的某些缺陷. 特别地，我们希望在某个可测集取值为 1 而在其余点取值为零的函数是可积的，且积分值是该集合的测度.

给定一集合 E，定义它的特征函数 χ_E 如下：

$$\chi_E(x) = \begin{cases}1 & x\in E\\ 0 & x\notin E\end{cases}$$

若集合 E_i 是可测的，则称线性组合

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{E_i}(x)$$

为**简单函数**. φ 的表示方法不是惟一的. 然而，一个函数 φ 是简单的当且仅当它是可测的且仅取有限个值. 如果 φ 是简单函数，$\{a_1, \cdots, a_n\}$ 是 φ 的非零值集合，那么，

$$\varphi=\sum a_i \chi_{A_i},$$

其中 $A_i=\{x: \varphi(x)=a_i\}$. φ 的这个表示法称为典范表示，它的特征是 A_i 不相交且 a_i 为互不相等的非零值.

若 φ 在某个有限测度集外为零，当它的典范表示为 $\varphi=\sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}$ 时，定义它的积分为

$$\int\varphi(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n} a_i mA_i$$

有时可将积分表达式简写为 $\int\varphi$. 如果 E 是任意可测集，则定义

77

$$\int_E\varphi = \int\varphi\cdot\chi_E.$$

通常使用非典范表示更为方便些，以下的引理将是很有用的：

1. 引理 *令 $\varphi=\sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{E_i}$ 对于 $i\neq j$，$E_i\cap E_j=\varnothing$. 假定每个集合 E_i 是具有有限测度的可测集，那么*

$$\int\varphi = \sum_{i=1}^{n} a_i mE_i.$$

证明　集合 $A_a=\{x: \varphi(x)=a\}=\bigcup_{a_i=a}E_i$. 根据 m 的加性有 $amA_a=\sum_{a_i=a}a_imE_i$，因而

$$\int\varphi(x)\mathrm{d}x=\sum amA_a$$
$$=\sum a_imE_i.$$
■

2. 命题　令 φ 和 ψ 是在一有限测度集外为零的简单函数，那么

$$\int(a\varphi+b\psi)=a\int\varphi+b\int\psi,$$

且若几乎处处有 $\varphi\geqslant\psi$，则

$$\int\varphi\geqslant\int\psi.$$

证明　令 $\{A_i\}$ 与 $\{B_i\}$ 分别为出现在 φ 与 ψ 典范表示中的集合. 令 A_0 和 B_0 分别表示 φ 与 ψ 为零的集合，那么取交集 $A_i\cap B_j$ 得到的所有集合 E_k 组成一个有限的不相交可测集簇. 可以写为

$$\varphi=\sum_{k=1}^{N}a_k\chi_{E_k}$$
$$\psi=\sum_{k=1}^{N}b_k\chi_{E_k}$$

进而有

$$a\varphi+b\psi=\sum(aa_k+bb_k)\chi_{E_k},$$

这样即由引理 1 得到 $\int(a\varphi+b\psi)=a\int\varphi+b\int\psi$. 要证明命题的第二部分，注意

$$\int\varphi-\int\psi=\int(\varphi-\psi)\geqslant 0,$$

这是由于根据积分的定义，几乎处处大于或等于零的简单函数的积分是非负的. ■

78

从这个命题可知若 $\varphi=\sum_{i=1}^{n}a_i\chi_{E_i}$，则 $\int\varphi=\sum a_imE_i$，因此引理 1 要求集合 E_i 不相交的限制是不必要的.

令 f 为有界实值函数，E 为有限测度的可测集. 类似于黎曼积分，对于简单函数 φ 和 ψ 考虑数值

$$\inf_{\psi\geqslant f}\int_E\psi$$

与

$$\sup_{\varphi\leqslant f}\int_E\varphi,$$

若问何时这两数相等，以下命题给出了答案：

3. 命题　令 f 为定义在可测集 E 上的有界实值函数，其中 E 的测度 mE 有限，那么

$$\inf_{f\leqslant\psi}\int_E\psi(x)\mathrm{d}x=\sup_{f\geqslant\varphi}\int_E\varphi(x)\mathrm{d}x$$

对所有简单函数 φ 和 ψ 成立的充要条件是 f 可测.

证明 令 f 是以 M 为界的可测函数，那么集合

$$E_k=\left\{x:\frac{kM}{n}\geqslant f(x)>\frac{(k-1)M}{n}\right\},\quad -n\leqslant k\leqslant n,$$

是可测的、不相交的，且并为 E. 因此

[79]

$$\sum_{k=-n}^{n}mE_k=mE.$$

由

$$\psi_n(x)=\frac{M}{n}\sum_{k=-n}^{n}k\,\chi_{E_k}(x)$$

和

$$\varphi_n(x)=\frac{M}{n}\sum_{k=-n}^{n}(k-1)\,\chi_{E_k}(x)$$

定义的简单函数满足

$$\varphi_n(x)\leqslant f(x)\leqslant\psi_n(x).$$

因此

$$\inf\int_E\psi(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_E\psi_n(x)\mathrm{d}x=\frac{M}{n}\sum_{k=-n}^{n}kmE_k$$

且

$$\sup\int_E\varphi(x)\mathrm{d}x\geqslant\int_E\varphi_n(x)\mathrm{d}x=\frac{M}{n}\sum_{k=-n}^{n}(k-1)mE_k,$$

故而得知

$$0\leqslant\inf\int_E\psi(x)\mathrm{d}x-\sup\int_E\varphi(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{M}{n}\sum_{k=-n}^{n}mE_k=\frac{M}{n}mE.$$

由于 n 是任意的，有

$$\inf\int_E\psi(x)\mathrm{d}x-\sup\int_E\varphi(x)\mathrm{d}x=0,$$

这样就证明了充分性.

现在假定

$$\inf_{\psi\geqslant f}\int_E\psi(x)\mathrm{d}x=\sup_{\varphi\leqslant f}\int_E\varphi(x)\mathrm{d}x.$$

那么给定 n，存在简单函数 φ_n 和 ψ_n 使得

$$\varphi_n(x)\leqslant f(x)\leqslant\psi_n(x)$$

且

$$\int\psi_n(x)\mathrm{d}x-\int\varphi_n(x)\mathrm{d}x<\frac{1}{n}.$$

那么根据定理 3.20 函数

[80]

$$\psi^*=\inf\psi_n$$

和

$$\varphi^* = \sup \varphi_n$$

是可测的，并且

$$\varphi^*(x) \leqslant f(x) \leqslant \psi^*(x).$$

因此集合

$$\Delta = \{x : \varphi^*(x) < \psi^*(x)\}$$

是集合

$$\Delta_v = \left\{x : \varphi^*(x) < \psi^*(x) - \frac{1}{v}\right\}$$

的并. 但每个 Δ_v 包含在集合 $\{x:\ \varphi_n(x) < \psi_n(x) - 1/v\}$ 内，后者的测度小于 v/n. 由于 n 是任意的，因而 $m\Delta_v = 0$，进而 $m\Delta = 0$. 所以除去一个零测度集外，$\varphi^* = \psi^*$，而且 $\varphi^* = f$，因此根据命题 3.21 函数 f 是可测的. 这就证明了必要性. ■

定义 如果 f 是一个定义在测度 mE 有限的可测集 E 上的有界可测函数，那么对于所有大于或等于 f 的简单函数 ψ，定义它在 E 上的(勒贝格)积分为

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x = \inf \int_E \psi(x)\mathrm{d}x.$$

有时我们将积分简写为 $\int_E f$. 若 $E = [a,b]$ 就用 $\int_a^b f$ 代替 $\int_{[a,b]} f$ 来表示积分. 若 f 是有界可测函数且在一个有限测度集 E 外等于零，那么用 $\int f$ 来表示 $\int_E f$. 注意 $\int_E f = \int f \cdot \chi_E$. 以下命题 3 的系表明勒贝格积分事实上就是黎曼积分的一个推广.

4. 命题 令 f 为定义在闭区间 $[a,b]$ 上的有界函数. 若 f 在 $[a,b]$ 上黎曼可积，那么它是可测的且

$$R\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

证明 由于每个阶梯函数同时也是简单函数，所以有

$$R\underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x \leqslant \sup_{\varphi \leqslant f} \int_a^b \varphi(x)\mathrm{d}x \leqslant \inf_{\psi \geqslant f} \int_s^b \psi(x)\mathrm{d}x \leqslant R\overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x.$$

因为 f 是黎曼可积的，所以以上不等式事实上均为等式. 因此，由命题 3 有 f 可测. ■

5. 命题 若 f 和 g 为定义在有限测度集 E 上的有界可测函数，那么：

i. $\int_E (af + bg) = a\int_E f + b\int_E g$.

ii. 若 $f = g$ 几乎处处成立，则

$$\int_E f = \int_E g.$$

iii. 若 $f \leqslant g$ 几乎处处成立，则

$$\int_E f \leqslant \int_E g.$$

81

因此

$$\left|\int f\right| \leqslant \int |f|.$$

iv. 若 $A \leqslant f(x) \leqslant B$，则

$$AmE \leqslant \int_E f \leqslant BmE.$$

v. 若 A 和 B 是具有有限测度的不相交可测集，则

$$\int_{A \cup B} f = \int_A f + \int_B f.$$

证明 若 ψ 是简单函数，那么 $a\psi$ 也是，反之亦然(若 $a \neq 0$). 因此对于 $a > 0$，

$$\int_E af = \inf_{\psi \geqslant f} \int_E a\psi = a \inf_{\psi \geqslant f} \int_E \psi = a \int_E f.$$

若 $a < 0$，运用命题 3 有

82

$$\int_E af = \inf_{\varphi \leqslant f} \int_E a\varphi = a \sup_{\varphi \leqslant f} \int_E \varphi = a \inf_{\psi \geqslant f} \int_E \psi = a \int_E f,$$

如果 ψ_1 是满足 $f \leqslant \psi_1$ 的简单函数，ψ_2 是满足 $g \leqslant \psi_2$ 的简单函数，那么 $\psi_1 + \psi_2$ 是满足 $f + g \leqslant \psi_1 + \psi_2$ 的简单函数. 因此

$$\int_E f + g \leqslant \int_E (\psi_1 + \psi_2) = \int_E \psi_1 + \int_E \psi_2.$$

由于上式右端的下确界是 $\int f + \int g$，有

$$\int_E f + g \leqslant \int_E f + \int_E g.$$

另一方面，$\varphi_1 \leqslant f$ 和 $\varphi_2 \leqslant g$ 蕴涵 $\varphi_1 + \varphi_2$ 是一个不大于 $f + g$ 的简单函数. 因此

$$\int_E f + g \geqslant \int_E (\varphi_1 + \varphi_2) = \int_E \varphi_1 + \int_E \varphi_2.$$

而现在上式右端的上确界是 $\int f + \int g$，所以

$$\int_E f + g \geqslant \int_E f + \int_E g,$$

命题的陈述(i)由此得到.

为证明(ii)，只需证明

$$\int_E f - g = 0.$$

由于 $f - g = 0$ a. e.，那么若简单函数 $\psi \geqslant f - g$，$\psi \geqslant 0$ a. e.. 由此得到

$$\int_E \psi \geqslant 0,$$

这样根据积分的定义就有

$$\int_E f - g \geqslant 0.$$

类似地，

$$\int_E f-g \leqslant 0,$$

这样就得到了(ii)的证明．这个证明也可用于建立(iii)．而(iv)可由(iii)与事实

$$\int_E 1 = mE.$$

导出，(v)可由(i)与事实$\chi_{A\cup B}=\chi_A+\chi_B$导出． ■ [83]

接下来要证明一个命题，它将用于证明定理 16，该命题是定理 16 的一个特殊情形．

6. 命题(有界收敛定理)　令$\langle f_n\rangle$为定义在有限测度集 E 上的可测函数序列，且假定存在一实数 M 使得对所有的 n 和 x 有 $|f_n(x)|\leqslant M$．如果在 E 的每一点 x，$f(x)=\lim f_n(x)$，那么

$$\int_E f = \lim\int_E f_n.$$

证明　该命题的证明很好地说明了如何使用李特尔伍德的"三个原理"．当$\langle f_n\rangle$一致收敛于 f 时该命题的结论是平凡的．李特尔伍德第三原理说的是若$\langle f_n\rangle$点态收敛于 f，那么$\langle f_n\rangle$"几乎"一致收敛于 f．该原理的一个精确版本由命题 3.23 给出，它说的是，给定 $\varepsilon>0$，存在 N 和一个可测集 $A\subset E$ 满足 $mA<\varepsilon/4M$，使得对于 $n\geqslant N$ 和 $x\in E\sim A$，有 $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon/2mE$．那么

$$\begin{aligned}\left|\int_E f_n-\int_E f\right| &= \left|\int_E f_n - f\right| \\ &\leqslant \int_E |f_n-f| \\ &= \int_{E\sim A}|f_n-f| + \int_A |f_n-f| \\ &< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

因此

$$\int_E f_n \to \int_E f.$$

■

以下完美的结论给出了一个判定有界函数是否黎曼可积的充分必要条件，它归功于勒贝格． [84]

7. 命题　区间$[a,b]$上的有界函数 f 黎曼可积当且仅当 f 的不连续点的集合测度为零．

习题

2. a. 令 f 为$[a,b]$上的有界函数，h 为 f 的上包络(参见习题 2.51)，那么 $R\overline{\int_a^b} f=\int_a^b h$．(若 $\varphi\geqslant f$ 是一个阶梯函数，则除有限个点外有 $\varphi\geqslant h$，因而$\int_a^b h\leqslant R\overline{\int_a^b} f$．但存在一个阶梯函数序列 $\langle\varphi_n\rangle$ 使得 $\varphi_n\downarrow h$．根据命题 6 有$\int_a^b h=\lim\int_a^b\varphi_n\geqslant R\overline{\int_a^b} f$．)

b. 用(a)的结论证明命题 7．

4.3 非负函数的积分

若 f 是定义在可测集 E 上的非负可测函数，那么定义

$$\int_E f = \sup_{h \leqslant f} \int_E h,$$

其中 h 是有界可测函数，且满足 $m\{x: h(x) \neq 0\}$ 有限.

8. 命题 如果 f 与 g 是非负可测函数，那么

i. $\int_E cf = c\int_E f$, $c > 0$.

ii. $\int_E f + g = \int_E f + \int_E g$.

iii. 若 $f \leqslant g$ a. e.，那么

$$\int_E f \leqslant \int_E g.$$

证明 (i)和(iii)可由命题 5 直接得到，下面仅给出(ii)的证明细节. 若 $h(x) \leqslant f(x)$ 且 $k(x) \leqslant g(x)$，有 $h(x) + k(x) \leqslant f(x) + g(x)$，因而

85

$$\int_E h + \int_E k \leqslant \int_E f + g.$$

取上确界，得到

$$\int_E f + \int_E g \leqslant \int_E f + g.$$

另一方面，令 l 为在一有限测度集外为零且不大于 $f+g$ 的有界可测函数，那么定义函数 h 与 k 如下：

$$h(x) = \min(f(x), l(x))$$

与

$$k(x) = l(x) - h(x).$$

我们有

$$h(x) \leqslant f(x)$$

与

$$k(x) \leqslant g(x),$$

这里 h 与 k 有界(它们以 l 的界为界)且在 l 的消失处消失. 因此 $\int_E l = \int_E h + \int_E k \leqslant \int_E f + \int_E g$，因而

$$\int_E f + \int_E g \geqslant \int_E f + g.$$ ■

9. 定理(法图引理) 若 $\langle f_n \rangle$ 为非负可测函数序列，且 $f_n(x) \to f(x)$ 在集合 E 上几乎处处成立，则

$$\int_E f \leqslant \underline{\lim} \int_E f_n.$$

证明 由于零测度集上的积分为零，不失一般性可假定收敛是逐点的. 令 h 为不大于 f 的

有界可测函数且在有限测度集 E' 外消失．用以下方式定义函数 h_n：

$$h_n(x) = \min\{h(x), f_n(x)\}.$$

86

那么函数 h_n 有界（h 的界即为它们的界）且在 E' 外消失．现在对 E' 的每一点 x，$h_n(x) \to h(x)$．因此，根据命题 6，得到

$$\int_E h = \int_{E'} h = \lim \int_{E'} h_n \leqslant \underline{\lim} \int_E f_n.$$

对 h 取上确界，就有

$$\int_E f \leqslant \underline{\lim} \int_E f_n.$$ ■

10. 单调收敛定理　令 $\langle f_n \rangle$ 为递增的非负可测函数序列，且令 $f = \lim f_n$ a. e.，那么

$$\int f = \lim \int f_n.$$

证明　根据定理 9 有

$$\int f \leqslant \underline{\lim} \int f_n.$$

但对于每个 n 有 $f_n \leqslant f$，因而 $\int f_n \leqslant \int f$．不过这蕴涵着

$$\overline{\lim} \int f_n \leqslant \int f.$$

因此

$$\int f = \lim \int f_n.$$ ■

11. 系　令 u_n 为非负可测函数序列，且令 $f = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$，那么

$$\int f = \sum_{n=1}^{\infty} \int u_n.$$

12. 命题　令 f 为非负函数且 $\langle E_i \rangle$ 是一个不相交的可测集序列．设 $E = \bigcup E_i$，那么

87

$$\int_E f = \sum \int_{E_i} f.$$

证明　令 $u_i = f \cdot \chi_{E_i}$，那么 $f \cdot \chi_E = \sum u_i$，因而该命题可由前面的系得到． ■

定义　一个非负可测函数 f 称为在可测集 E 上可积，若

$$\int_E f < \infty.$$

13. 命题　令 f 与 g 为两个非负可测函数．若 f 在 E 上可积且在 E 上 $g(x) < f(x)$，那么 g 也在 E 上可积，且

$$\int_E f - g = \int_E f - \int_E g.$$

证明　根据命题 8，

$$\int_E f = \int_E (f - g) + \int_E g.$$

由于上式的左边有限，那么等式的右边项也必须有限，因而 g 是可积的. ■

14. 命题 非负可测函数 f 在 E 上可积，那么给定 $\varepsilon>0$，存在一个 $\delta>0$ 使得对每个满足 $A\subset E$ 且 $mA<\delta$ 的集合 A 有

$$\int_A f<\varepsilon.$$

证明 若 f 是有界的，该命题就是平凡的. 若 $f(x)\leqslant n$ 设 $f_n(x)=f(x)$，否则 $f_n(x)=n$，那么每个 f_n 有界并在每个点收敛到 f. 根据单调收敛定理存在一个 N 使得 $\int_E f_N>\int_E f-\varepsilon/2$，且 $\int_E f-f_N<\varepsilon/2$. 选取 $\delta<\varepsilon/2N$，若 $mA<\delta$，有

$$\begin{aligned}\int_A f&=\int_A(f-f_N)+\int_A f_N\\&<\int_E(f-f_N)+NmA\\&<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\end{aligned}$$ ■

88

习题

3. 令 f 为一个非负可测函数. 证明 $\int f=0$ 蕴涵 $f=0$ a. e. .

4. 令 f 为一个非负可测函数.
   a. 证明存在一个在有限测度集外消失的递增非负简单函数序列 $\langle\varphi_n\rangle$ 使得
   $$f=\lim\varphi_n.$$
   b. 证明对于所有简单函数 $\varphi\leqslant f$，$\int f=\sup\int\varphi$.

5. 令 f 是一个非负可积函数，用定理 10 证明如下定义的函数 F
   $$F(x)=\int_{-\infty}^x f$$
   是连续的.

6. 令 $\langle f_n\rangle$ 是一个收敛于 f 的非负可测函数序列，假定对每个 n，$f_n\leqslant f$，那么
   $$\int f=\lim\int f_n.$$

7. a. 证明在法图引理中可以有严格不等式. [考虑如下定义的序列，若 $n\leqslant x<n+1$，$f_n(x)=1$，否则 $f_n(x)=0$.]
   b. 证明对于递减函数序列，单调收敛定理不一定成立. [令 $f_n(x)=0$ 若 $x<n$，$f_n(x)=1$ 若 $x\geqslant n$.]

8. 证明法图引理的一个推广：若 $\langle f_n\rangle$ 是一个非负函数序列，那么
   $$\int\underline{\lim}f_n\leqslant\underline{\lim}\int f_n.$$

9. 令 $\langle f_n\rangle$ 是 $(-\infty,\infty)$ 上的一个使得 $f_n\to f$ a. e. 的非负可测函数序列，假定 $\int f_n\to\int f<\infty$，那么

对每个可测集 E 有$\int_E f_n \to \int_E f$.

4.4　广义勒贝格积分

谈到一个函数 f 的正部 f^+，我们指的是函数 $f^+ = f \vee 0$；即

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\}.$$

89

类似地，定义负部 f^- 为 $f^- = (-f) \vee 0$. 若 f 是可测的，那么 f^+ 和 f^- 也可测. 我们有

$$f = f^+ - f^-$$

与

$$|f| = f^+ + f^-.$$

有了这些概念即可给出以下定义：

定义　对可测函数 f，若 f^+ 与 f^- 在 E 上可积则称 f 在 E 上可积. 在这种情形下定义它的积分为

$$\int_E f = \int_E f^+ - \int_E f^-.$$

15. 命题　若 f 和 g 是 E 上可积的，那么：

i. 函数 cf 在 E 上可积，且$\int_E cf = c\int_E f$.

ii. 函数 $f+g$ 在 E 上可积，且

$$\int_E f + g = \int_E f + \int_E g.$$

iii. 若 $f \leqslant g$ a. e.，那么$\int_E f \leqslant \int_E g$.

iv. 若 A 和 B 是包含于 E 的不相交的可测集，那么

$$\int_{A \cup B} f = \int_A f + \int_B f.$$

证明　(i)部分可由积分的定义及命题 8 直接得到. 为证明(ii)部分，首先发现若 f_1 和 f_2 是非负可积函数且满足 $f = f_1 - f_2$，那么 $f^+ + f_2 = f^- + f_1$. 由命题 8 可知

$$\int f^+ + \int f_2 = \int f^- + \int f_1,$$

因而

90

$$\int f = \int f^+ - \int f^- = \int f_1 - \int f_2.$$

但是，若 f 和 g 可积，则 $f^+ + g^+$ 和 $f^- + g^-$ 也可积，且$(f+g) = (f^+ + g^+) - (f^- + g^-)$. 因此

$$\begin{aligned}\int (f+g) &= \int (f^+ + g^+) - \int (f^- + g^-) \\ &= \int f^+ + \int g^+ - \int f^- - \int g^-\end{aligned}$$

$$= \int f + \int g.$$

(iii)部分可从(ii)部分和非负可积函数的积分非负这一事实得到. 对于(iv)有

$$\int_{A \cup B} f = \int f \chi_{A \cup B}$$

$$= \int f \chi_A + \int f \chi_B$$

$$= \int_A f + \int_B f. \qquad \blacksquare$$

应当注意到 $f+g$ 在点 $f=\infty$、$g=-\infty$ 与 $f=-\infty$、$g=\infty$ 处没有定义,然而由于 f 和 g 可积,这样的点集测度必须为零. 因此 $f+g$ 的可积性与积分 $\int(f+g)$ 的值与这种意义模糊的函数值选择无关.

16. 勒贝格收敛定理 令 g 为 E 上可积的函数,$\langle f_n \rangle$ 为可积函数序列使得在 E 上 $|f_n| \leqslant g$ 且对几乎所有属于 E 的 x 有 $f(x)=\lim f_n(x)$,那么

$$\int_E f = \lim \int_E f_n.$$

证明 函数 $g-f_n$ 非负,因而根据定理 9 有

$$\int_E (g-f) \leqslant \underline{\lim} \int_E (g-f_n).$$

由于 $|f| \leqslant g$,f 是可积的,且有

[91]

$$\int_E g - \int_E f \leqslant \int_E g - \overline{\lim} \int_E f_n,$$

这就得到

$$\int_E f \geqslant \overline{\lim} \int_E f_n.$$

类似地,考虑 $g+f_n$,可得到

$$\int_E f \leqslant \underline{\lim} \int_E f_n,$$

这样就证明了该定理. $\blacksquare$

上面的定理要求序列 $\langle f_n \rangle$ 被固定的可积函数 g 所控制. 然而,在证明过程中并没有如此多的要求. 若用 g_n 代替 g,就得到以下推广的勒贝格收敛定理:

17. 定理 令 $\langle g_n \rangle$ 为一个几乎处处收敛于可积函数 g 的可积函数序列,令 $\langle f_n \rangle$ 为满足 $|f_n| \leqslant g_n$ 且几乎处处收敛于 f 的可测函数序列. 若

$$\int g = \lim \int g_n,$$

则

$$\int f = \lim \int f_n.$$

若 $\langle f_n \rangle$ 是几乎处处收敛于 f 的可测函数序列,那么法图引理、单调收敛定理和勒贝格收敛定

理全都断言了在某种适当的假设下可以根据$\int f_n$来推断出$\int f$的某些事实. 法图引理的假设条件最弱:仅要求 f_n 以零(或更一般的以一个可积函数)为下界. 与之相应地,法图引理的结论也比其他定理弱:仅可以断言$\int f \leqslant \underline{\lim}\int f_n$. 勒贝格收敛定理要求函数 f_n 分别有固定的可积函数为上界与下界,因而断言$\int f$与$\lim\int f_n$的相等性. 而单调收敛定理(作为其推广的习题6)多少是一个混合体:它要求 f_n 以零(或一个可积函数)为下界,且以极限函数 f 自身为上界. 当然,若 f 可积,它就是勒贝格收敛定理的一种特殊情形,但是法图引理和单调收敛定理的优点在于:它们甚至可被运用于 f 不可积的情形,并且常常是证明 f 可积的一种好方法. 注意到仅使用积分的正性和线性特点,法图引理与单调收敛定理就可以互相导出,从此意义来看,这两个定理是非常接近的. [92]

习题

10. a. 证明若 f 在 E 上可积,则 $|f|$ 可积且

$$\left|\int_E f\right| \leqslant \int_E |f|.$$

那么 $|f|$ 的可积性蕴涵了 f 的可积性吗?

b. 一个函数的不恰当的黎曼积分可以在无须该函数可积(在勒贝格意义下)的条件下存在,例如定义在$[0, \infty]$上的函数 $f(x)=(\sin x)/x$. 若 f 是可积的,证明这个不恰当的黎曼积分存在时它就等于勒贝格积分.

11. 若 φ 是简单函数,4.2 节和本节分别给出了$\int\varphi$的两种定义. 证明它们是相同的.

12. 令 g 为集合 E 上的可积函数,且假设$\langle f_n\rangle$是使得在 E 上 $|f_n(x)| \leqslant g(x)$ a.e. 的可测函数序列,那么

$$\int_E \underline{\lim} f_n \leqslant \underline{\lim}\int_E f_n \leqslant \overline{\lim}\int_E f_n \leqslant \int_E \overline{\lim} f_n.$$

13. 令 h 为一可积函数,$\langle f_n\rangle$ 是一个满足 $f_n \geqslant -h$ 且 $\lim f_n = f$ 的可测函数序列. 证明$\int f_n$与$\int f$有意义且$\int f \leqslant \underline{\lim}\int f_n$.

14. a. 证明在定理 17 的假设下有

$$\int |f_n - f| \to 0.$$

b. 令$\langle f_n\rangle$为使得 $f_n \to f$ a.e. 的可积函数序列且 f 可积,那么$\int |f-f_n| \to 0$当且仅当$\int |f_n| \to \int |f|$.

15. a. 令 f 为在 E 上可积的函数,那么,给定 $\varepsilon>0$,存在一个简单函数 φ 使得

$$\int_E |f-\varphi| < \varepsilon.$$

[将习题 4 应用于 f 的正部和负部.] [93]

b. 在同样的假设下存在一个阶梯函数 ψ 使得

$$\int_E |f-\psi|<\varepsilon.$$

[将(a)部分与命题 3.22 结合.]

c. 在同样的假设下存在一个在有限区间外消失的连续函数 g 使得

$$\int_E |f-g|<\varepsilon.$$

16. 建立黎曼-勒贝格定理:若 f 为 $(-\infty,+\infty)$ 上的可积函数,那么$\lim\limits_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x=0$.

[提示:若 f 是阶梯函数,定理很容易. 利用习题 15.]

17. a. 若 f 为 $(-\infty, +\infty)$上的可积函数,那么

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\int f(x+t)\mathrm{d}x.$$

b. 若 g 是有界可测函数. 那么

$$\lim_{t\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}|g(x)[f(x)-f(x+t)]|=0.$$

[提示:若 f 连续且在一个有限区间外消失,这个结果即可从 f 的一致连续性得到. 运用习题 15.]

18. 令 f 为定义在正方形 $Q=\{\langle x, t\rangle: 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant t\leqslant 1\}$上的两个变量$\langle x, t\rangle$的函数,且对每个固定的 t 还是 x 的可测函数. 假定$\lim\limits_{t\to 0}f(x, t)=f(x)$且对所有的 t 有 $|f(x, t)|\leqslant g(x)$,其中 g 是$[0, 1]$上的可积函数,那么

$$\lim_{t\to 0}\int f(x,t)\mathrm{d}x=\int f(x)\mathrm{d}x.$$

(习题 2.49f 在这里有用.)

证明若也有对每个固定的 x,$f(x, t)$是 t 的连续函数,那么

$$h(t)=\int f(x,t)\mathrm{d}x$$

是 t 的连续函数.

19. 令 f 为定义在正方形 $Q=\{\langle x, t\rangle: 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant t\leqslant 1\}$上的有界函数,对每个固定的 t,f 是 x 的可测函数. 对于每个$\langle x, t\rangle\in Q$,令偏导 $\partial f/\partial t$ 存在. 假定 $\partial f/\partial t$ 在 Q 有界,那么

94

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^1 f(x,t)\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{\partial f}{\partial t}\mathrm{d}x.$$

*4.5 依测度收敛

假定$\langle f_n\rangle$ 是可测函数序列且满足$\int |f_n|\to 0$,那么关于序列$\langle f_n\rangle$ 有何说法呢?这种序列的最重要性质或许是:对于每个正数 η 集合$\{x: |f_n(x)|>\eta\}$ 的测度必须趋于零. 这就导致引入以下的定义:

定义　可测函数序列$\langle f_n\rangle$依测度收敛于 f：若给定 $\varepsilon>0$ 存在一个 N 使得对所有 $n\geqslant N$ 有

$$m\{x:|f(x)-f_n(x)|\geqslant\varepsilon\}<\varepsilon.$$

从该定义与命题 3.23 直接得知，若$\langle f_n\rangle$是定义在有限测度可测集 E 上的可测函数序列且 $f_n\to f$ a.e.，那么$\langle f_n\rangle$依测度收敛于 f. $\langle f_n\rangle$在$[0,1]$上依测度收敛于零，但是$\langle f_n(x)\rangle$对$[0,1]$上的任意 x 都不收敛，这种序列$\langle f_n\rangle$的例子可构造一个如下：令 $n=k+2^v$，$0\leqslant k<2^v$，且设 $f_n(x)=1$ 若 $x\in[k2^{-v},(k+1)2^{-v}]$，否则 $f_n(x)=0$，那么

$$m\{x:|f_n(x)|>\varepsilon\}\leqslant\frac{2}{n},$$

因而依测度地 $f_n\to 0$，然而，对任意 $x\in[0,1]$，当 n 任意大时序列$\langle f_n(x)\rangle$取到值 1，因而不收敛. 不过，我们却有以下命题：

18. 命题　令$\langle f_n\rangle$是依测度收敛于 f 的可测函数序列，那么它存在一个几乎处处收敛于 f 的子序列$\langle f_{n_k}\rangle$.

证明　给定 v，存在整数 n_v，使得对所有 $n\geqslant n_v$，有

$$m\{x:|f_n(x)-f(x)|\geqslant 2^{-v}\}<2^{-v}.$$

95

令 $E_v=\{x:|f_{n_v}(x)-f(x)|\geqslant 2^{-v}\}$，那么若 $x\notin\bigcup_{v=k}^{\infty}E_v$，对于 $v\geqslant k$ 必须有 $|f_{n_v}(x)-f(x)|<2^{-v}$，所以 $f_{n_v}(x)\to f(x)$. 因此对任意 $x\notin A=\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{v=k}^{\infty}E_v$，$f_{n_v}(x)\to f(x)$. 但 $mA\leqslant m\left[\bigcup_{v=k}^{\infty}E_v\right]\leqslant\sum_{v=k}^{\infty}mE_v=2^{-k+1}$，因此 $mA=0$. ■

19. 系　令$\langle f_n\rangle$是定义在有限测度可测集 E 上的可测函数序列，那么它依测度收敛于 f 当且仅当$\langle f_n\rangle$的每个子序列本身也都有一个子序列几乎处处收敛于 f.

20. 命题　若用“依测度收敛”代替“几乎处处收敛”，则法图引理、单调收敛定理和勒贝格收敛定理仍然成立.

习题

20. 若$\langle f_n\rangle$是依测度收敛到 f 的序列，那么它的每个子序列$\langle f_{n_k}\rangle$依测度收敛到 f.
21. 用习题 20 和 2.12 从命题 18 导出命题 20.
22. 证明有限可测集上的可测函数序列$\langle f_n\rangle$依测度收敛到 f 当且仅当$\langle f_n\rangle$的每个子序列本身也都有一个子序列依测度收敛到 f.
23. 证明系 19.
24. 用命题 14 直接证明若$\langle f_n\rangle$依测度收敛于 f，且若存在一个可积函数 g 使得对所有的 n 有 $|f_n|\leqslant g$，那么
$$\int|f_n-f|\to 0.$$
25. 可测函数序列$\langle f_n\rangle$称为一个依测度的柯西序列，若给定 $\varepsilon>0$ 存在一个 N 使得对所有 m，$n\geqslant N$ 有

$$m\{x: |f_n(x)-f_m(x)|\geq\varepsilon\}<\varepsilon.$$

证明若$\langle f_n\rangle$是依测度的柯西序列，那么存在一个函数f使得序列$\langle f_n\rangle$依测度收敛于它. [选取$n_{v+1}>n_v$使得$m\{x: |f_{n_v}-f_{n_{v+1}}|>2^{-v}\}<2^{-v}$，那么级数$\sum(f_{n_{v+1}}-f_{n_v})$几乎处处收敛于函数$g$. 令$f=g+f_{n_1}$，那么依测度$f_{n_v}\to f$，并且可以证明相应地$f_n$依测度收敛于$f$.]

96

第5章　微分与积分

本章主要考虑在何种意义下微分是积分的逆．特别地将关注以下问题：何时有

$$\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x = f(b) - f(a)?$$

何时有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(y)\mathrm{d}y = f(x)?$$

根据黎曼积分理论可知，若 x 是 f 的连续点，那么第二个等式成立．下面将会证明这个等式在更一般的情况下几乎处处成立，因此微分是勒贝格积分的逆．然而，第一个问题较为困难，即便运用勒贝格积分它也仅对某些函数类成立，我们将刻画该类函数．

5.1　单调函数的微分

令 $\mathscr{I}$ 为区间簇．如果对每个 $\varepsilon>0$ 和任意属于 E 的 x，存在区间 $I\in\mathscr{I}$ 使得 $x\in I$ 且 $l(I)<\varepsilon$，那么就说 $\mathscr{I}$ 在维塔利意义下覆盖集合 E．这些区间可以是开的、闭的或半开的，但是不允许退化区间出现，即区间仅由单点组成．

1. 引理(维塔利)　*令 E 为具有有限外测度的集合，$\mathscr{I}$ 是一个在维塔利意义下覆盖 E 的区间簇，那么给定 $\varepsilon>0$，$\mathscr{I}$ 中存在一个有限不相交区间簇 $\{I_1, \cdots, I_N\}$ 使得*

$$m^*\left[E\sim\bigcup_{n=1}^N I_n\right]<\varepsilon.$$

证明　仅需对 $\mathscr{I}$ 中的每个区间都是闭的情形证明，否则考虑它们的闭包，这是由于我们发现区间 $I_1, \cdots, I_N$ 的端点集是零测度集．

令 O 为包含 E 的有限测度开集．由于 $\mathscr{I}$ 是 E 的一个维塔利覆盖，不失普遍性地可以假定 $\mathscr{I}$ 中的每个 I 包含在 O 内．我们递归地选择 $\mathscr{I}$ 中的不交区间序列 $\langle I_n\rangle$ 如下：令 I_1 为 $\mathscr{I}$ 中的任意区间且假定已经选定 $I_1, \cdots, I_n$，令 k_n 为 $\mathscr{I}$ 中不与区间 $I_1, \cdots, I_n$ 中的任何一个相交的区间的长度的上确界．由于每个 I 都包含在 O 内，所以有 $k_n\leqslant mO<\infty$．除非 $E\subset\bigcup_{i=1}^n I_i$，否则可以找到 $\mathscr{I}$ 中的 I_{n+1} 使得 $l(I_{n+1})>\frac{1}{2}k_n$，并且 I_{n+1} 与 $I_1, \cdots, I_n$ 不相交．

因此就有了 $\mathscr{I}$ 中的不相交区间序列 $\langle I_n\rangle$，且由于 $\bigcup I_n\subset O$，有 $\sum l(I_n)\leqslant mO<\infty$．因此能找到一个整数 N 使得

$$\sum_{N+1}^{\infty} l(I_n)<\frac{\varepsilon}{5}.$$

令

$$R = E\sim\bigcup_{n=1}^N I_n.$$

若能证明 $m^*R<\varepsilon$ 本引理即得证．令 x 为 R 中的任意点，由于 $\bigcup_{n=1}^N I_n$ 是不包含 x 的闭集．所以

能够找到$\mathscr{I}$中的区间I：它包含x且长度足够小使得I与区间$I_1, \cdots, I_N$都不相交．若此时
98
$I \cap I_i = \varnothing$对于$i \leqslant n$成立，那就必须有$l(I) \leqslant k_n < 2l(I_{n+1})$．因为$\lim l(I_n) = 0$，那么区间$I$至少必与区间$I_n$中的一个相交．令$n$为$I$与$I_n$相交的最小整数，有$n > N$，且$l(I) \leqslant k_{n-1} \leqslant 2l(I_n)$．由于$x$属于$I$，且$I$与$I_n$有公共点，这就得到$x$与$I_n$中点的距离至多为$l(I) + \frac{1}{2}l(I_n) \leqslant \frac{5}{2}l(I_n)$．因此$x$属于区间$J_n$，其与$I_n$有相同中点且长度是$I_n$的5倍．至此已经证明了

$$R \subset \bigcup_{N+1}^{\infty} J_n.$$

因此

$$m^* R \leqslant \sum_{N+1}^{\infty} l(J_n) = 5 \sum_{N+1}^{\infty} l(I_n) < \varepsilon. \qquad \blacksquare$$

为讨论一个函数f的导数，首先定义f在x点的**导数**，该导数是一个包含以下4个量的集合：

$$D^+ f(x) = \overline{\lim_{h \to 0+}} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

$$D^- f(x) = \overline{\lim_{h \to 0+}} \frac{f(x) - f(x-h)}{h},$$

$$D_+ f(x) = \underline{\lim_{h \to 0+}} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

$$D_- f(x) = \underline{\lim_{h \to 0+}} \frac{f(x) - f(x-h)}{h}$$

显然地，有$D^+ f(x) \geqslant D_+ f(x)$与$D^- f(x) \geqslant D_- f(x)$．若$D^+ f(x) = D_+ f(x) = D^- f(x) = D_- f(x) \neq \pm\infty$，则说$f$在点$x$可微且定义$f'(x)$为这些导数在$x$点的共同值．若$D^+ f(x) = D_+ f(x)$则称$f$在点$x$有右导数，且定义$f'(x+)$为它们的共同值．同样地，可定义左导数$f'(x-)$．

2. 命题　*若f在$[a, b]$上连续，且它的某个导数(比如D^+)在(a, b)上处处非负，那么f*
99
在$[a, b]$上非减；即对于$x \leqslant y$，$f(x) \leqslant f(y)$．

3. 定理　*令f为定义在区间$[a, b]$上的递增实值函数，那么f几乎处处可微．导数f'可测，并且*

$$\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x \leqslant f(b) - f(a).$$

证明　先证明使任意两个导数不等的集合的测度为零．我们仅考虑使得$D^+ f(x) > D_- f(x)$的集合E．导数的其他组合作类似处理即可．现在集合E是下列集合的并集

$$E_{u,v} = \{x : D^+ f(x) > u > v > D_- f(x)\}$$

其中u与v遍历所有有理数．因此仅需证明$m^* E_{u,v} = 0$．令$s = m^* E_{u,v}$，选取$\varepsilon > 0$，用满足$mO < s + \varepsilon$的开集O包住$E_{u,v}$．对于$E_{u,v}$的每一点x，存在一个任意小的区间$[x-h, x]$包含于O使得

$$f(x) - f(x-h) < vh.$$

根据引理1能从这些区间中选取一个有限集簇$\{I_1, \cdots, I_N\}$，其内部覆盖外测度大于$s - \varepsilon$的

$E_{u,v}$子集 A，那么对这些区间求和，有

$$\sum_{n=1}^{N}[f(x_n)-f(x_n-h_n)]<v\sum_{n=1}^{N}h_n$$
$$<vmO$$
$$<v(s+\varepsilon).$$

现在每个点 $y\in A$ 都是包含于某个 I_n 的任意小区间$(y, y+k)$的左端点，且满足 $f(y+k)-f(y)>uk$. 再次运用引理 1，就能够从这些区间中选取出有限簇$\{J_1, \cdots, J_M\}$，使得它们的并包含外测度大于 $s-2\varepsilon$ 的 A 的子集，那么对这些区间求和得到

$$\sum_{i=1}^{M}f(y_i+k_i)-f(y_i)>u\sum k_i$$
$$>u(s-2\varepsilon).$$

每个区间 J_i 都包含在某个区间 I_n 里，因而若对那些使得 $J_i\subset I_n$ 的 i 求和，由于 f 递增，有

$$\sum f(y_i+k_i)-f(y_i)\leqslant f(x_n)-f(x_n-h_n),$$

100

因此

$$\sum_{n=1}^{N}f(x_n)-f(x_n-h_n)\geqslant\sum_{i=1}^{M}f(y_i+k_i)-f(y_i),$$

因而

$$v(s+\varepsilon)>u(s-2\varepsilon).$$

上式对每个正数 ε 都成立，所以 $vs\geqslant us$. 但 $u>v$，因而 s 必须等零.

这表明函数

$$g(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

几乎处处有定义，且 f 在 g 有限的点可微.

令

$$g_n(x)=n[f(x+1/n)-f(x)],$$

这里对于 $x\geqslant b$ 设 $f(x)=f(b)$. 那么对几乎所有的 x，$g_n(x)\to g(x)$，因而 g 可测.

由于 f 是递增的，我们有 $g_n\geqslant 0$.

因此根据法图引理

$$\int_a^b g\leqslant\underline{\lim}\int_a^b g_n=\underline{\lim}\ n\int_a^b[f(x+1/n)-f(x)]\mathrm{d}x$$
$$=\underline{\lim}\left[n\int_b^{b+1/n}f-n\int_a^{a+1/n}f\right]$$
$$=\underline{\lim}\left[f(b)-n\int_a^{a+1/n}f\right]$$
$$\leqslant f(b)-f(a).$$

这就表明了 g 是可积的，并因此几乎处处有限. 所以 f 可微 a. e. 且 $g=f'$ a. e.. ■

习题

1. 令 f 为如下定义的函数：$f(0)=0$ 且当 $x\neq 0$，$f(x)=x\sin(1/x)$. 求 $D^+f(0)$，$D_+f(0)$，

$D^- f(0)$和 $D_- f(0)$.

2. a. 证明 $D^+[-f(x)]=-D_+ f(x)$.

[101]

   b. 若 $g(x)=f(-x)$，则 $D^+ g(x)=-D_- f(-x)$.

3. a. 若 f 在$[a, b]$上连续，且在 $c\in(a, b)$取到局部极大值，则

$$D_- f(c)\leqslant D^- f(c)\leqslant 0\leqslant D_+ f(c)\leqslant D^+ f(c).$$

   b. 若 f 在 a 或 b 处取到局部极大值，则能得出什么结论?

4. 证明命题 2. [提示：首先证明该命题对于满足 $D^+ g\geqslant\varepsilon>0$ 的函数 g 成立. 再将此运用于函数 $g(x)=f(x)+\varepsilon x$.]

5. a. 证明 $D^+(f+g)\leqslant D^+ f+D^+ g$.

   b. 叙述和证明关于其他导数的类似不等式.

   c. 令 f 和 g 非负且在 c 连续，那么

$$D^+(f\cdot g)(c)\leqslant f(c)D^+ g(c)+g(c)D^+ f(c).$$

6. 令 f 为定义在$[a, b]$上的函数，g 是定义在$[\alpha, \beta]$上的连续函数，且在 γ 可微并满足 $g(\gamma)=c\in(a, b)$.

   a. 若 $g'(\gamma)>0$，则 $D^+(f\circ g)(\gamma)=D^+ f(c)\cdot g'(\gamma)$.

   b. 若 $g'(\gamma)<0$，则 $D^+(f\circ g)(\gamma)=D_- f(c)\cdot g'(\gamma)$.

   c. 若 $g'(\gamma)=0$ 且 f 的所有导数在 c 有限，则

$$D^+(f\circ g)(\gamma)=0.$$

5.2　有界变差函数

令 f 为定义在区间$[a, b]$上的实值函数，$a=x_0<x_1<\cdots<x_k=b$ 为区间$[a, b]$的任意分划. 定义

$$p=\sum_{i=1}^{k}[f(x_i)-f(x_{i-1})]^+$$

$$n=\sum_{i=1}^{k}[f(x_i)-f(x_{i-1})]^-$$

$$t=n+p=\sum_{i=1}^{k}|f(x_i)-f(x_{i-1})|,$$

这里用 r^+ 表示当 $r\geqslant 0$ 为 r 且当 $r\leqslant 0$ 为 0，并设 $r^-=|r|-r^+$，

有 $f(b)-f(a)=p-n$. 设

$$P=\sup p,$$
$$N=\sup n,$$
$$T=\sup t,$$

[102]

这里上确界取自$[a, b]$所有可能的分划. 显然地，$P\leqslant T\leqslant P+N$. 我们分别称 P、N、T 为 f 在$[a, b]$上的正变差、负变差和全变差. 为表示全变差对区间$[a, b]$以及 f 的依赖性，有时将它写为 T_a^b、$T_a^b(f)$等等. 若 $T<\infty$，则称 f 为$[a, b]$上的**有界变差**函数. 有时会将这个概念简

单记为 $f \in BV$.

4. 引理 若 f 为$[a, b]$上的有界变差函数，那么

$$T_a^b = P_a^b + N_a^b$$

且

$$f(b) - f(a) = P_a^b - N_a^b.$$

证明 对$[a, b]$的任意分划

$$P = n + f(b) - f(a),$$

对所有可能的分划取上确界，得到

$$P = N + f(b) - f(a).$$

再对

$$t = p + n = p + p - \{f(b) - f(a)\}$$

取上确界，即得到

$$T = 2P - \{f(b) - f(a)\} = P + N$$ ■

5. 定理 函数 f 是$[a, b]$上的有界变差函数当且仅当它是$[a, b]$上两个单调实值函数的差.

证明 令 f 为有界变差，且令 $g(x) = P_a^x$、$h(x) = N_a^x$. 那么 g 与 h 都是实值单调递增函数，这是由于 $0 \leqslant P_a^x \leqslant T_a^x \leqslant T_a^b < \infty$ 与 $0 \leqslant N_a^x \leqslant T_a^x \leqslant T_a^b < \infty$. 但是根据引理 4，$f(x) = g(x) - h(x) + f(a)$. 因为 $h - f(a)$是一个单调函数，所以已将 f 表示为两个实值单调函数的差.

另一方面，若在$[a, b]$上有 $f = g - h$，其中 g 和 h 是递增函数. 那么对于任意分划有

$$\begin{aligned}\sum |f(x_i) - f(x_{i-1})| &\leqslant \sum [g(x_i) - g(x_{i-1})] + \sum [h(x_i) - h(x_{i-1})] \\ &= g(b) - g(a) + h(b) - h(a).\end{aligned}$$

因此

$$T_a^b(f) \leqslant g(b) + h(b) - g(a) - h(a).$$ ■

103

6. 系 若 f 是$[a, b]$上的有界变差函数，那么对几乎所有 x 属于$[a, b]$，$f'(x)$存在.

习题

7. a. 令 f 为$[a, b]$上的有界变差函数. 证明对每个 $c \in (a, b)$，当 $x \to c-$ 或 $x \to c+$ 时 $f(x)$的极限存在. 证明一个单调函数(因而一个有界变差函数)只能有可数个不连续点. [提示：若 f 是单调的，则使得 $|f(c+) - f(c-)| > 1/n$ 的点数有限.]
   b. 构造一个在$[0, 1]$上的单调函数其在每个有理点不连续.
8. a. 证明若 $a \leqslant c \leqslant b$，那么 $T_a^b = T_a^c + T_c^b$，而且 $T_a^c \leqslant T_a^b$.
   b. 证明 $T_a^b(f+g) \leqslant T_a^b(f) + T_a^b(g)$，且 $T_a^b(cf) = |c| T_a^b(f)$.
9. 令$\langle f_n \rangle$为定义在$[a, b]$上的函数序列，它在$[a, b]$上的每一点都收敛于一个函数 f，那么 $T_a^b(f) \leqslant \underline{\lim} T_a^b(f_n)$.
10. a. 令 f 为如下定义的函数：$f(0) = 0$ 且当 $x \neq 0$，$f(x) = x^2 \sin(1/x^2)$. 请问 f 在$[-1, 1]$上是否为有界变差?
    b. 令 g 为如下定义的函数：$g(0) = 0$ 且当 $x \neq 0$，$g(x) = x^2 \sin(1/x)$. 请问 g 在$[-1, 1]$上是

否为有界变差？

11. 令 f 为$[a, b]$上的有界变差函数，证明

$$\int_a^b |f'| \leqslant T_a^b(f).$$

5.3 积分的微分

若 f 为区间$[a, b]$上的可积函数，定义它的不定积分为$[a, b]$上的函数 F 为

$$F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t.$$

104

本节要证明一个可积函数的不定积分导数几乎处处等于该函数. 下面从建立一些引理开始.

7. 引理　*令 f 在$[a, b]$上可积，那么如下定义的函数 F*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

是$[a, b]$上的有界变差连续函数.

证明　连续性可由命题 4.14 得到. 为证明 F 有界变差，令 $a=x_0<x_1<\cdots<x_k=b$ 是$[a, b]$的任意分划，那么

$$\sum_{i=1}^k |F(x_i) - F(x_{i-1})| = \sum_{i=1}^k \left|\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \sum_{i=1}^k \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(t)|\mathrm{d}t$$
$$= \int_a^b |f(t)|\mathrm{d}t.$$

因此

$$T_a^b(F) \leqslant \int_a^b |f(t)|\mathrm{d}t < \infty.$$ ■

8. 引理　*若 f 为区间$[a, b]$上的可积函数且*

$$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = 0$$

对于所有 $x\in[a, b]$成立，那么在$[a, b]$上 $f(t)=0$ a. e. .

证明　假定使 $f(x)>0$ 的点集 E 具有正测度，则根据命题 3.15 存在一个闭集 $F\subset E$ 使得 $mF>0$. 令 $O=(a,b)\sim F$，那么或者$\int_a^b f \neq 0$，或者

$$0 = \int_a^b f = \int_F f + \int_O f,$$

且

$$\int_O f = -\int_F f \neq 0.$$

但 O 是不相交的可数开区间簇$\{(a_n, b_n)\}$的并，因而根据命题 4.12

105

$$\int_O f = \sum \int_{a_n}^{b_n} f.$$

因此对某个 n 有

$$\int_{a_n}^{b_n} f \neq 0,$$

因而或者

$$\int_a^{a_n} f \neq 0$$

或者

$$\int_a^{b_n} f \neq 0.$$

无论如何若 f 在某个正测度集上为正，那么对某个 $x\in[a, b]$有

$$\int_a^x f \neq 0.$$

类似地对于 f 在某个正测度集为负，可由逆否关系得到引理. ■

9. 引理　若 f 在$[a, b]$上有界可测且

$$F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t + F(a),$$

则对于几乎所有属于$[a, b]$ 的 x，$F'(x)=f(x)$.

证明　根据引理 7，F 是$[a, b]$上的有界变差函数，因而对几乎所有属于$[a, b]$的 x，$F'(x)$存在. 令 $|f|\leqslant K$，再设

$$f_n(x) = \frac{F(x+h)-F(x)}{h},$$

取 $h=1/n$，有

$$f_n(x) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\mathrm{d}t,$$

因而

$$|f_n| \leqslant K.$$

由于

$$f_n(x) \to F'(x) \quad \text{a. e.},$$

106

而且 F 是连续的，所以有界收敛定理蕴涵着

$$\begin{aligned}\int_a^c F'(x)\mathrm{d}x &= \lim\int_a^c f_n(x)\mathrm{d}x = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_a^c (F(x+h)-F(x))\mathrm{d}x \\ &= \lim\left[\frac{1}{h}\int_c^{c+h} F(x)\mathrm{d}x - \frac{1}{h}\int_a^{a+h} F(x)\mathrm{d}x\right] \\ &= F(c)-F(a) = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

那么对所有的 $c\in[a, b]$

$$\int_a^c \{F'(x)-f(x)\}\mathrm{d}x = 0$$

因而根据引理 8

$$F'(x) = f(x) \quad \text{a. e.}$$

■

10. 定理　令 f 为区间$[a, b]$上的可积函数，且假设

$$F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)\mathrm{d}t.$$

那么对几乎所有属于$[a, b]$的 x，$F'(x)=f(x)$.

证明 不失一般性可以假定 $f\geqslant 0$. 定义 f_n 如下：$f_n(x)=f(x)$若 $f(x)\leqslant n$，$f_n(x)=n$ 若 $f(x)>n$,则 $f-f_n\geqslant 0$，因而

$$G_n(x) = \int_a^x f - f_n$$

是 x 的递增函数，其导数必须几乎处处存在，且该导数非负. 根据引理 9

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f_n = f_n(x) \quad \text{a. e. },$$

因而

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}G_n + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f_n \\ &\geqslant f_n(x) \quad \text{a. e.} \end{aligned}$$

[107]

由于 n 是任意的，因此

$$F'(x) \geqslant f(x) \quad \text{a. e.}$$

相应地，

$$\int_a^b F'(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

因此根据定理 3 有

$$\int_a^b F'(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

且

$$\int_a^b (F'(x) - f(x))\mathrm{d}x = 0.$$

由于 $F'(x)-f(x)\geqslant 0$，这表明 $F'(x)-f(x)=0$ a. e. ，因而 $F'(x)=f(x)$ a. e. . ■

5.4 绝对连续性

我们称定义在$[a, b]$上的实值函数 f 为**绝对连续**函数：若给定 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$ 使得

$$\sum_{i=1}^{n} |f(x'_i) - f(x_i)| < \varepsilon$$

对于每个满足

$$\sum_{i=1}^{n} |x'_i - x_i| < \delta$$

的有限不重叠区间簇$\{(x_i, x'_i)\}$成立. 绝对连续函数是连续函数，且根据命题 4.14 每个不定积分都是绝对连续函数. 两个绝对连续函数的和与差也是绝对连续函数.

11. 引理 *若 f 在$[a, b]$上绝对连续，那么它在$[a, b]$上有界变差.*

证明 令 δ 为绝对连续定义中相应于 $\varepsilon=1$ 的 δ，那么对$[a, b]$的任何分划可以分裂成 K

(若需要，可插入新的分点)个区间集，而每个的总长度都小于 δ，这里 K 是小于 $1+(b-a)/\delta$ 的最大整数. 因此对任何分划有 $t\leqslant K$，因而 $T\leqslant K$. ■ [108]

12. 系 若 f 绝对连续，那么 f 几乎处处有导数.

13. 引理 若 f 在 $[a, b]$ 上绝对连续且 $f'(x)=0$ a. e.，那么 f 是常数.

证明 对于任意 $c\in[a, b]$，我们希望证明 $f(a)=f(c)$. 令 $E\subset(a, c)$ 为测度等于 $c-a$ 的集合，在其上 $f'(x)=0$. 令 ε 和 η 为任意正数，对于 E 中的每个 x，存在一个任意小的区间 $[x, x+h]$ 包含于 $[a, c]$，使得 $|f(x+h)-f(x)|<\eta h$. 根据引理 1，可找到一个这类不重叠区间的有限簇 $\{[x_k, y_k]\}$，其覆盖 E 的除测度小于 δ 的集合外的所有点，这里 δ 是对应于在 f 绝对连续定义中的 ε 的正数. 若标记 x_k 使得 $x_k\leqslant x_{k+1}$，则有

$$y_0 = a \leqslant x_1 < y_1 \leqslant x_2 < \cdots \leqslant y_n \leqslant c = x_{n+1}$$

与

$$\sum_{k=0}^{n} |x_{k+1} - y_k| < \delta.$$

那么根据 $\{[x_k, y_k]\}$ 的构造方式，

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} |f(y_k) - f(x_k)| &\leqslant \eta \sum (y_k - x_k) \\ &< \eta(c-a)\end{aligned}$$

且根据 f 的绝对连续性

$$\sum_{k=0}^{n} |f(x_{k+1}) - f(y_k)| < \varepsilon$$

因此

$$\begin{aligned}|f(c) - f(a)| &= \left|\sum_{k=0}^{n}[f(x_{k+1}) - f(y_k)] + \sum_{k=1}^{n}[f(y_k) - f(x_k)]\right| \\ &\leqslant \varepsilon + \eta(c-a).\end{aligned}$$

由于 ε 和 η 是任意的正数，因此 $f(c)-f(a)=0$. ■ [109]

14. 定理 一个函数 F 是不定积分当且仅当它绝对连续.

证明 若 F 是一个不定积分，那么根据命题 4.14 它是绝对连续的. 假设另一方面，F 是 $[a, b]$ 上的绝对连续函数，那么 F 是有界变差，且可以将它写为

$$F(x) = F_1(x) - F_2(x),$$

其中 F_i 单调递增. 因此导数 $F'(x)$ 几乎处处存在且

$$|F'(x)| \leqslant F'_1(x) + F'_2(x).$$

因此根据定理 3，

$$\int |F'(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant F_1(b) + F_2(b) - F_1(a) - F_2(a)$$

且 $F'(x)$ 是可积的. 令

$$G(x) = \int_a^x F'(t)\,\mathrm{d}t.$$

那么 G 是绝对连续的函数，因而 $f=F-G$ 也是绝对连续的函数. 根据定理 10，$f'(x)=F'(x)-$

$G'(x)=0$ a.e.．所以根据引理 13，f 是常数．因此

$$F(x)=\int_a^x F'(t)\mathrm{d}t+F(a).$$ ■

15. 系　每个绝对连续函数都是它的导数的不定积分.

习题

12. 令 f 为对于每个 $\varepsilon>0$ 在区间$[\varepsilon, 1]$绝对连续的函数，那么 f 在 0 的连续性是否蕴涵 f 在$[0, 1]$上绝对连续？若 f 还在$[0, 1]$上有界变差，情况又如何呢？
13. 令 f 为$[a, b]$上的绝对连续函数．证明

110

$$T_a^b(f)=\int_a^b|f'| \quad \text{和} \quad P_a^b(f)=\int_a^b[f']^+.$$

14. a. 证明两个绝对连续函数的和与差是绝对连续函数.
    b. 证明两个绝对连续函数的乘积是绝对连续函数．［提示：运用它们是有界的这一事实.］
    c. 若 f 在$[a, b]$上绝对连续且若 f 从不为零，那么函数 $g=1/f$ 也在$[a, b]$上绝对连续.
15. 康托尔三分函数(习题 2.48)连续单调但不是绝对连续.
16. 一个$[a, b]$上的单调函数 f 称为**奇异的**若 $f'=0$ a.e..
    a. 证明任何单调递增函数都是一个绝对连续函数与一个奇异函数的和.
    b. 令 f 是$[a, b]$上的一个非减奇异函数，那么 f 具有以下性质：(S)给定 $\varepsilon>0$，$\delta>0$，存在一个不重叠区间的有限簇$\{[y_k, x_k]\}$使得
    $$\sum|x_k-y_k|<\delta$$
    且
    $$\sum f(x_k)-f(y_k)>f(b)-f(a)-\varepsilon.$$
    ［提示：见引理 13 的证明.］
    c. 令 f 为$[a, b]$上的非减函数且具有(b)部分的性质(S)，那么 f 是奇异的．［提示：用(a)部分.］
    d. 令$\langle f_n\rangle$为$[a, b]$上的非减奇异函数序列使得函数
    $$f(x)=\sum f_n(x)$$
    处处有限，那么 f 也是奇异的.
    e. 证明$[0, 1]$上存在一个严格增加的奇异函数.
17. a. 令 F 在$[c, d]$上绝对连续，g 在$[a, b]$上绝对连续且满足 $c\leqslant g\leqslant d$，那么 $F\circ g$ 在$[a, b]$上绝对连续.
    b. 令 $E=\{x: g'(x)=0\}$，那么 $m(g[E])=0$.
18. 令 g 为$[0, 1]$上的绝对连续单调函数且 E 为零测度集，那么 $g[E]$的测度为零.
19. a. 构造一个在$[0, 1]$上绝对连续的严格单调函数 g，使得 $g'=0$ 在具有正测度的集上成立.
    ［提示：令 G 为具有正测度的广义康托尔集的补集(习题 3.14)且令 g 为χ_G的不定积分.］

b. 证明存在一个零测度集 E 使得 $g^{-1}[E]$不可测. 将该例子与习题 3.28 相比. [111]

20. 一个函数 f 称为在区间上满足利普希茨条件，若存在常数 M 使得 $|f(x)-f(y)|\leqslant M|x-y|$ 对于该区间的所有 x 和 y 都成立.

a. 证明满足利普希茨条件的函数是绝对连续的.

b. 证明绝对连续函数 f 满足利普希茨条件当且仅当 $|f'|$ 有界.

c. 证明当 f 的一个导数(比如说 D^+)有界，那么 f 满足利普希茨条件.

21. 变量变换Ⅰ. 令 g 为$[a, b]$上的单调递增绝对连续函数满足 $g(a)=c$，$g(b)=d$.

a. 证明对于任何开集 $O\subset[c, d]$

$$mO=\int_{g^{-1}[O]}g'(x)\mathrm{d}x.$$

b. 令 $H=\{x: g'(x)\neq 0\}$. 若 E 是$[c, d]$的子集满足 $mE=0$，那么 $g^{-1}[E]\cap H$ 的测度为零.

c. 若 E 是$[c, d]$的可测子集，那么 $F=g^{-1}[E]\cap H$ 可测且

$$mE=\int_F g'=\int_a^b\chi_E(g(x))g'(x)\mathrm{d}x.$$

d. 若 f 是$[c, d]$上的一个非负可测函数，那么$(f\circ g)g'$在$[a, b]$上可测且

$$\int_c^b f(y)\mathrm{d}y=\int_a^b f(g(x))g'(x)\mathrm{d}x.$$

22. 变量变换Ⅱ. 令 g 为$[a, b]$上的单调递增绝对连续函数满足 $g(a)=c$，$g(b)=d$，且令 f 为$[c, d]$上的可积函数. 令

$$F(y)=\int_c^y f(t)\mathrm{d}t,$$

且设 $H(x)=F(g(x))$.

a. 证明 H 是绝对连续的(习题 17a)，且只要 H' 和 g'存在并有 $g'(x)\neq 0$ 就有 $F'(g(x))$. 因此

$$H'(x)=F'(g(x))g'(x)$$

除使得 $g'(x)=0$ 的集合 E 外几乎处处成立.

b. 令

$$f_0(y)=\begin{cases}f(y) & y\notin g[E]\\ 0 & y\in g[E].\end{cases}$$

[112]

那么 $f_0=f$ a. e. (见习题 17. b). 因此

$$H'(x)=f_0(g(x))g'(x)\quad \text{a. e.}$$

c. 证明

$$\int_c^d F(y)\mathrm{d}y=\int_a^b F(g(x))g'(x)\mathrm{d}x.$$

d. 若不假定 g 单调(c)部分的表达式是否仍然成立? 假定 g 有界，且 f 在包含 F 值域的区间可积.

5.5　凸函数

定义在开区间(a, b)上的函数φ称为凸的，若对每个x与y属于(a, b)和每个$\lambda(0\leqslant\lambda\leqslant1)$有

$$\varphi(\lambda x+(1-\lambda)y)\leqslant\lambda\varphi(x)+(1-\lambda)\varphi(y).$$

观察φ在$\mathbf{R}^2$的图像，这个条件可用几何表述为：$\langle x, \varphi(x)\rangle$与$\langle y, \varphi(y)\rangle$之间弦上的每一点均位于$\varphi$的图像上方．以下引理给出了有关凸函数弦的一个重要性质，其证明留给读者．

16. 引理　*若φ是(a, b)上的凸函数，且若x, y, x', y'是(a, b)上的点满足$x\leqslant x'<y'$与$x<y\leqslant y'$，那么(x', y')弦的斜率大于(x, y)弦的斜率；即*

$$\frac{\varphi(y)-\varphi(x)}{y-x}\leqslant\frac{\varphi(y')-\varphi(x')}{y'-x'}.$$

若一个函数f的上下左导数D^-f与D_-f在点x相等且有限，就说函数f在x左可微且称这个共同值为f在x的左导数．类似地，称函数f在x点右可微若D^+f与D_+f在该点相等．以下命题给出了凸函数的一些连续性与可微性．

17. 命题　*若φ是(a, b)上的凸函数，那么φ在(a, b)的每个闭子区间上绝对连续．φ的左导数和右导数在(a, b)的每一点存在且除一个可数集外彼此相等．左导数和右导数是单调递增函数，且在每一点左导数小于或等于右导数．*

113

证明　令$[c, d]\subset(a, b)$．那么根据引理16，对于属于$[c, d]$的x, y有

$$\frac{\varphi(c)-\varphi(a)}{c-a}\leqslant\frac{\varphi(y)-\varphi(x)}{y-x}\leqslant\frac{\varphi(b)-\varphi(d)}{b-d}$$

因此在$[c, d]$上$|\varphi(y)-\varphi(x)|\leqslant M|x-y|$，因而$\varphi$是绝对连续的(参见习题20)．

若$x_0\in(a, b)$，那么根据引理16，$[\varphi(x)-\varphi(x_0)]/(x-x_0)$是$x$的增函数，因而当$x$从左或从右趋近于$x_0$时该函数的极限存在且有限．因此$\varphi$在每一点都左可微和右可微，且左导数小于或等于右导数．若$x_0<y_0$，$x<y_0$，且$x_0<y$，则

$$\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{x-x_0}\leqslant\frac{\varphi(y)-\varphi(y_0)}{y-y_0},$$

而且在x_0的导数小于或等于在y_0的导数．因此每个导数都是单调的，若它们中的一个在某一点连续那么它们在该点相等．由于一个单调函数只能有可数个不连续点，所以在除去一个可测集外它们都相等． ■

以下命题是先前命题的部分逆命题．

18. 命题　*若φ是(a, b)上的连续函数，且若φ的一个导数(比如说D^+)非减，那么φ是凸的．*

证明　给定x与y满足$a<x<y<b$，定义$[0, 1]$上的函数ψ如下

$$\psi(t)=\varphi[ty+(1-t)x]-t\varphi(y)-(1-t)\varphi(x).$$

目标是证明ψ在$[0, 1]$上非正．因为ψ是连续的，且$\psi(0)=\psi(1)=0$．此外有

$$D^+\psi=(y-x)D^+\varphi-\varphi(y)+\varphi(x),$$

因而$D^+\psi$在$[0, 1)$上非减．

令 γ 为 ψ 在[0，1]上取到最大值的点．若 $\gamma=1$，则在[0，1]上 $\psi(t)\leqslant\psi(1)=0$，因此假定 $\gamma\in[0, 1)$． 114

由于 ψ 在 γ 点取到局部极大，所以有 $D^+\psi(\gamma)\leqslant 0$．但 $D^+\psi$ 非减，因而在[0，γ]上 $D^+\psi\leqslant 0$．相应地，ψ 在[0，γ]上非增，因此 $\psi(\gamma)\leqslant\psi(0)=0$．故而 ψ 在[0，1]上的最大值非正，且在[0，1]上 $\psi\leqslant 0$． ■

19. 系 令 φ 在(a, b)的每一点上有二阶导数，那么 φ 在(a, b)上凸当且仅当对每个 $x\in(a, b)$，$\varphi''(x)\geqslant 0$．

令 φ 为(a, b)上的凸函数，且 $x_0\in(a, b)$，那么，若通过$\langle x_0, \varphi(x_0)\rangle$的直线 $y=m(x-x_0)+\varphi(x_0)$总是落在 φ 的图像下方，即若

$$\varphi(x)\geqslant m(x-x_0)+\varphi(x_0).$$

则称它为 φ 在 x_0 点的*支撑线*．根据引理 16，这样一条直线是支撑直线当且仅当它的斜率 m 落在点 x_0 的左导数与右导数之间．因此，特别地，在每一点至少存在一条支撑直线．有了这个概念，即能给出以下命题的一个简短证明：

20. 命题(詹森不等式) 令 φ 为$(-\infty, \infty)$的凸函数且 f 为[0，1]上的可积函数，那么

$$\int\varphi(f(t))\mathrm{d}t\geqslant\varphi\left[\int f(t)\mathrm{d}t\right].$$

证明 令 $\alpha=\int f(t)\mathrm{d}t$，且令 $y=m(x-\alpha)+\varphi(\alpha)$ 为 α 点的支撑线的方程，那么

$$\varphi(f(t))\geqslant m(f(t)-\alpha)+\varphi(\alpha).$$

上式两边关于 t 积分即得到命题． ■

这个不等式有值得一提的几何解释．由于点 $\lambda x_1+(1-\lambda)x_2$ 是质量 λ 与 $1-\lambda$ 在点 x_1 与 x_2 的形心，可以说一个函数是凸的若它在两点形心的值小于它在这两点的加权平均．詹森不等式就是这个事实的推广：若定义直线上的质量分布 μ 为 $\mu(a,b]=m\{t:a<f(t)\leqslant b\}$，则 $\int f(t)\mathrm{d}t$ 是该质量的形心而 $\int\varphi(f(t))\mathrm{d}t=\int\varphi(x)\mathrm{d}\mu$ 是 φ 的加权平均．

詹森不等式的一个重要应用就是取凸函数 φ 为 exp，其定义为 $\exp x=\mathrm{e}^x$．此时的詹森不等式就成为算术平均与几何平均之间不等式的一个推广： 115

21. 系 令 f 为[0，1]上的可积函数，那么

$$\int\exp(f(t))\mathrm{d}t\geqslant\exp\left[\int f(t)\mathrm{d}t\right].$$

下面给出两个进一步的定义以结束本节．一个函数 φ 是*严格凸*的若

$$\varphi(\lambda x+(1-\lambda)y)<\lambda\varphi(x)+(1-\lambda)\varphi(y)$$

对于所有 $x, y\in(a, b)$ 和所有 $\lambda\in(0, 1)$成立．

一个函数 φ 是*凹*的指的是 $-\varphi$ 是凸的．线性函数是惟一既凸又凹的函数．

若 I 是任意区间，开、闭或半开，那么 φ 在 I 上是凸的若 φ 在 I 上连续且在 I 内部是凸的．习题 23c 给出了关于这样函数的一个重要性质．

习题

23. a. 令 φ 为有限区间$[a, b)$上的凸函数，那么 φ 有下界.
    b. 证明若 φ 在(a, b)上是凸的，那么当 x 从(a, b)内趋于 a（或 b）时，$\varphi(x)$有一个极限（可能无限）. 若 a（或 b）是有限的，则这个极限在 a（或 b）可能是$+\infty$但不可能是$-\infty$.
    c. 令 φ 为区间 I（开、闭、半开）上的连续函数，且在 I 的内部凸，那么
    $$\varphi(tx+(1-t)y) \leqslant t\varphi(x)+(1-t)\varphi(y)$$
    对于所有 $x, y \in I$ 和所有 $t \in [0, 1]$成立.
24. 证明系 19.
25. a. 假定 $a \geqslant 0$、$b > 0$，那么函数 $\varphi(t)=(a+bt)^p$ 对于 $1 \leqslant p < \infty$ 在$[0, \infty)$上凸，且对于 $0 < p \leqslant 1$ 凹.
    b. 证明 φ 对于 $p > 1$ 严格凸，而对于 $0 < p < 1$ 严格凹.

116

26. 系 21 中的等式何时成立？
27. 令$\langle \alpha_n \rangle$是和为 1 的非负数列，且$\langle \xi_n \rangle$为正数列，那么
    $$\prod_{n=1}^{\infty} \xi_n^{\alpha_n} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \xi_n.$$
28. 令 g 为$[0,1]$上的非负可测函数，那么只要$\int \log(g(t))\mathrm{d}t$ 有定义，就有 $\log\int g(t)\mathrm{d}t \geqslant \int \log(g(t))\mathrm{d}t$.

117

第6章 经典巴拿赫空间

6.1 L^p 空间

本章研究某些实变函数空间. 令 p 为正实数. 定义在区间[0,1]上的可测函数 f 若满足 $\int_0^1 |f|^p < \infty$，则称它属于 $L^p = L^p[0,1]$ 空间. 根据该定义，L^1 恰好由全体定义在[0,1]上的勒贝格可积函数组成. 由于 $|f+g|^p \leqslant 2^p(|f|^p+|g|^p)$，可见两个 L^p 空间中的函数和仍然属于 L^p 空间. 由于只要 f 属于 L^p 空间，αf 就属于 L^p 空间. 因此只要 f 与 g 属于 L^p 空间，就有 $\alpha f+\beta g$ 属于 L^p 空间. 通常称具有以下性质的实值函数空间 X 为线性空间(或向量空间)：对于每对属于 X 的 f 和 g 与每对常数 α 和 β，都有 $\alpha f+\beta g$ 属于 X. 因此 L^p 空间是线性空间.

对于函数 f 属于 L^p，定义

$$\|f\| = \|f\|_p = \left\{\int_0^1 |f|^p\right\}^{1/p}.$$

可见 $\|f\|=0$ 当且仅当 $f=0$ a.e.. 若 α 是一个常数，那么 $\|\alpha f\| = |\alpha|\ \|f\|$. 在下一节我们将导出两个不等式，第一个不等式叙述的是当 $p\geqslant 1$，$\|f+g\| \leqslant \|f\| + \|g\|$，这个性质被称为次加性. 今后，如果没有特别说明，我们将假定 $p\geqslant 1$. 将线性空间的每个元素 f 赋予一个非负实数 $\|f\|$ 使得 $\|\alpha f\| = |\alpha|\ \|f\|$，$\|f+g\| \leqslant \|f\| + \|g\|$，且 $\|f\|=0 \Leftrightarrow f\equiv 0$ 后，所得到的空间称为赋范线性空间. 遗憾的是，L^p 空间的范数不满足这最后一条要求，原因是，对于 $\|f\|=0$ 只能得出 $f=0$ a.e.. 然而，几乎处处相等的函数可视作等价的；因而，若对于等价函数不加区分，那么 L^p 空间就是赋范线性空间[⊖].

[118]

为方便起见，将[0，1]上的有界可测函数全体(或除去一个可能测度为零的子集外的有界可测函数)记为 L^∞. 同样将等价的函数视为相同. 那么 L^∞ 是一个线性空间，且若定义范数

$$\|f\| = \|f\|_\infty = \text{ess sup}\ |f(t)|,$$

其中 ess sup $f(t)$ 是 sup $g(t)$ 当 g 遍历所有几乎处处等于 f 的函数的下确界，则 L^∞ 成为一个赋范线性空间. 因此

$$\text{ess sup}\ f(t) = \inf\{M : m\{t : f(t) > M\} = 0\}.$$

习题

1. 证明 $\|f+g\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.
2. 令 f 为[0，1]上的有界可测函数，那么 $\lim\limits_{p\to\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$.
3. 证明 $\|f+g\|_1 \leqslant \|f\|_1 + \|g\|_1$.
4. 若 $f\in L^1$ 且 $g\in L^\infty$，则

$$\int |fg| \leqslant \|f\|_1 \cdot \|g\|_\infty.$$

⊖ 若拘泥于数学的逻辑严谨性，则应该称 L^p 的元素为等价的函数类而非函数(参见习题10.10).

6.2　闵可夫斯基不等式与赫尔德不等式

本节的目标是在 L^p 空间建立几个与范数 $\|\ \|_p$ 有关的不等式. 首先是当 $1\leqslant p\leqslant\infty$ 时范数的次加性.

119

1. 闵可夫斯基不等式　*若 f 和 g 属于 L^p，$1\leqslant p\leqslant\infty$，那么 $f+g$ 也属于 L^p 且*

$$\|f+g\|_p\leqslant\|f\|_p+\|g\|_p.$$

若 $1<p<\infty$，则等式成立仅当存在非负常数 α 和 β 满足 $\beta f=\alpha g$.

证明　$p=\infty$ 的情形是基本的(习题 1)，当 $\|f\|=0$ 或 $\|g\|=0$ 时的情形也是如此. 因此假定 $1\leqslant p<\infty$ 且 $\|f\|=\alpha\neq 0$，$\|g\|=\beta\neq 0$，那么存在函数 f_0 与 g_0 使得 $|f|=\alpha f_0$，$|g|=\beta g_0$ 且 $\|f_0\|=\|g_0\|=1$. 设 $\lambda=\alpha/(\alpha+\beta)$. 那么 $(1-\lambda)=\beta/(\alpha+\beta)$，且有

$$\begin{aligned}|f(x)+g(x)|^p\leqslant(|f(x)|+|g(x)|)^p&=[\alpha f_0(x)+\beta g_0(x)]^p\\&=(\alpha+\beta)^p[\lambda f_0(x)+(1-\lambda)g_0(x)]^p\\&\leqslant(\alpha+\beta)^p[\lambda f_0(x)^p+(1-\lambda)g_0(x)^p]\end{aligned}$$

最后一个不等式用到当 $1\leqslant p<\infty$，函数 $\varphi(t)=t^p$ 在 $[0,\infty)$ 上的凸性(参见习题 5.25).

若 $1<p<\infty$，这个不等式是严格的除非 $f_0(x)=g_0(x)$ 且 $\operatorname{sgn} f(x)=\operatorname{sgn} g(x)$. 对此不等式的两边积分得到

$$\begin{aligned}\|f+g\|^p&\leqslant(\alpha+\beta)^p[\lambda\|f_0\|^p+(1-\lambda)\|g_0\|^p]\\&\leqslant(\alpha+\beta)^p=(\|f\|+\|g\|)^p.\end{aligned}$$

取 p 次根得到

$$\|f+g\|\leqslant\|f\|+\|g\|.$$

若 $1<p<\infty$，该不等式是严格的除非 $f_0=g_0$ a. e. 且 $\operatorname{sgn} f=\operatorname{sgn} g$ a. e.. 但这又意味着不等式是严格的，除非 $\beta f=\alpha g$. ■

注意当 $0<p<1$ 时函数 $\varphi(t)=t^p$ 在 $[0,\infty)$ 上是凹的. 因此对上述证明加以修改，自然就给出下面的不等式：

2. $0<p<1$ 的闵可夫斯基不等式　*令 f 和 g 是属于 $L^p(0<p<1)$ 的两个非负函数，那么*

$$\|f+g\|\geqslant\|f\|+\|g\|.$$

120

接着要建立一个微分形式的闵可夫斯基不等式，从下面的引理开始.

3. 引理　*令 $1\leqslant p<\infty$，那么对于非负的 a，b 和 t，有*

$$(a+tb)^p\geqslant a^p+ptba^{p-1}.$$

证明　设

$$\varphi(t)=(a+tb)^p-a^p-ptba^{p-1}.$$

那么 $\varphi(0)=0$，且对于 $p\geqslant 1$ 与 a，b，$t\geqslant 0$

$$\varphi'(t)=pb[(a+tb)^{p-1}-a^{p-1}]\geqslant 0$$

因此 $\varphi(t)$ 递增进而当 $t>0$ 非负. ■

4. 赫尔德不等式　*若 p 和 q 是非负扩充实数使得*

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,$$

且若 $f\in L^p$ 与 $g\in L^q$，那么 $fg\in L^1$ 且

$$\int |fg| \leqslant \|f\|_p \cdot \|g\|_q.$$

等式成立当且仅当对于某两个不全为零的常数 α 和 β，有 $\alpha|f|^p=\beta|g|^q$ a. e..

证明　$p=1$，$q=\infty$ 情形的证明很简单，留给读者. 因此假定 $1<p<\infty$ 而相应地 $1<q<\infty$. 若需要，可以用 $|f|$ 和 $|g|$ 来代替 f 与 g，这里仅需考虑 $f\geqslant 0$ 与 $g\geqslant 0$ 的情形. 设

$$h(x) = g(x)^{q-1} = g(x)^{q/p},$$

由于 $q-1=q/p$. 也有

$$g(x) = h(x)^{p-1} = h(x)^{p/q}.$$

那么

$$ptf(x)g(x) = ptf(x)h(x)^{p-1} \leqslant (h(x)+tf(x))^p - h(x)^p.$$

因此

$$pt\int fg \leqslant \int |h+tf|^p - \int h^p = \|h+tf\|^p - \|h\|^p$$

121

且

$$pt\int fg \leqslant (\|h\| + t\|f\|)^p - \|h\|^p.$$

两边对 t 微分后令 $t=0$，得到

$$p\int fg \leqslant p\|f\| \|h\|_p^{p-1} = p\|f\| \|g\|.$$

该等式成立的条件可由闵可夫斯基不等式中等号成立的条件得到. ■

习题

5. a. 对于 $0<p<1$ 证明闵可夫斯基不等式.
   b. 证明甚至对于 $0<p<1$ 也有以下结论：若 $f\in L^p$ 与 $g\in L^p$，则 $f+g\in L^p$. [提示：$\|f+g\|^p\leqslant 2^p(\|f\|^p+\|g\|^p)$.]
6. 对于 $0<p<1$ 陈述和证明赫尔德不等式.
7. a. 对于 $1\leqslant p<\infty$，用 l^p 表示所有满足 $\sum\limits_{v=1}^{\infty}|\xi_v|^p<\infty$ 的序列 $\langle\xi_v\rangle_{v=1}^{\infty}$ 空间. 证明关于序列的闵可夫斯基不等式：

$$\|\langle\xi_v+\eta_v\rangle\|_p \leqslant \|\langle\xi_v\rangle\|_p + \|\langle\eta_v\rangle\|_p.$$

   这里有 $1\leqslant p\leqslant\infty$，

$$(\|\langle\xi_v\rangle\|_p)^p = \sum_{v=1}^{\infty}|\xi_v|^p$$

   与

$$\|\langle\eta_v\rangle\|_\infty = \sup|\eta_v|.$$

   b. 证明若 $\langle\xi_v\rangle\in l^p$ 与 $\langle\eta_v\rangle\in l^q$ 满足

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,$$

则

$$\sum_{v=1}^{\infty} |\xi_v \eta_v| \leqslant \| \langle \xi_v \rangle \|_p \cdot \| \langle \eta_v \rangle \|_q.$$

[122] 这就是关于序列的赫尔德不等式.

8. a. 令 a，b 非负，$1<p<\infty$，$1/p+1/q=1$. 证明杨氏不等式

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

[可以用几个概念上不同的方法来证明该不等式.]

b. 用杨氏不等式给出赫尔德不等式的一个不同于本书中的证明.

c. 证明当 $0<p<1$ 时杨氏不等式的不等号反向.

d. 对于 $0<p<1$ 证明赫尔德不等式.

6.3 收敛性与完备性

将实数序列的收敛概念推广，即可以得到赋范线性空间的序列收敛概念.

定义 我们称一个赋范线性空间的序列 $\langle f_n \rangle$ 收敛于该空间的一个元素 f：若给定 $\epsilon>0$，存在 N，使得对于所有 $n>N$ 有 $\| f-f_n \| <\epsilon$. 若 f_n 收敛于 f，可写为 $f=\lim f_n$ 或 $f_n \to f$.

另一种阐述 f_n 到 f 的收敛性的方式是指明 $\| f_n-f \| \to 0$ 时 $f_n \to f$. 在 L^p 空间的收敛，$1\leqslant p<\infty$，常常指的是 **p 阶平均收敛**. 因此一个函数序列 $\langle f_n \rangle$ 称为 p 阶平均收敛于 f，若每个 f_n 属于 L^p 且 $\| f-f_n \|_p \to 0$. 而在 L^∞ 的收敛几乎是一致收敛(习题 10).

由于所讨论的总是由函数构成的线性空间 X，所以必须仔细区分函数序列在 X 中的收敛概念与其在每一个点收敛的概念. 我们将后一种情形称为**点态收敛**，且称 $\langle f_n \rangle$ 点态收敛于 f 若对每个 x 有 $f(x)=\lim f_n(x)$. 若存在一个零测度集 E 使得对每个 x 属于 $\widetilde{E}$ 有 $f(x)=\lim f_n(x)$，那么就说 f_n 几乎处处收敛于 f.

[123] 正如同实数序列的情形，赋范线性空间的一个序列 $\langle f_n \rangle$ 称为**柯西序列**：若给定 $\epsilon>0$，存在 N 使得对所有 $n\geqslant N$ 和所有 $m\geqslant N$ 有 $\| f_n-f_m \| <\epsilon$. 很容易证明每个收敛序列都是一个柯西序列.

定义 赋范线性空间称为**完备的**，若其每个柯西序列收敛，即若对于该空间的每个柯西序列 $\langle f_n \rangle$ 存在该空间的一个元素 f 使得 $f_n \to f$. 一个完备的赋范线性空间称为**巴拿赫空间**.

赋范线性空间的级数 $\langle f_n \rangle$ 称为可和的且和为 s：若 s 属于该空间且该级数的部分和序列收敛于 s；即

$$\left\| s - \sum_{i=1}^{n} f_i \right\| \to 0.$$

在此情形下，写为 $s = \sum_{i=1}^{\infty} f_i$. 若级数 $\langle f_n \rangle$ 满足 $\sum_{n=1}^{\infty} \| f_n \| < \infty$ 则称它为绝对可和的.

对一个实数级数而言绝对可和意指该级数可和. 但对元素取自赋范线性空间的级数来说这个关系一般不成立，以下命题表明若该空间是完备的则这个蕴涵关系成立.

5. 命题 一个赋范线性空间 X 是完备的当且仅当每个绝对可和级数都是可和的.

证明 $\Rightarrow$：令 X 为完备的，$\langle f_n \rangle$ 为绝对可和序列. 由于 $\sum \| f_n \| =M<\infty$，对每个 $\epsilon>0$，

存在 N 使得 $\sum_{n=N}^{\infty}\|f_n\|<\varepsilon$. 令 $s_n=\sum_{i=1}^{n}f_i$ 为级数 $\langle f_n\rangle$ 的部分和序列，那么对于 $n\geqslant m\geqslant N$ 有

$$\|s_n-s_m\|=\left\|\sum_{i=m}^{n}f_i\right\|\leqslant\sum_{i=m}^{\infty}\|f_i\|\leqslant\sum_{i=N}^{\infty}\|f_i\|<\varepsilon.$$

因此部分和序列 $\langle s_n\rangle$ 是一个柯西序列，并因 X 是完备的它必须收敛于 X 的一个元素 s.

$\Leftarrow$：令 $\langle f_n\rangle$ 为 X 的一个柯西序列. 对每个整数 k 存在一个整数 n_k，使得 $\|f_n-f_m\|<2^{-k}$ 对所有大于 n_k 的 n 和 m 成立. 我们可以选取 $\{n_k\}$ 使得 $n_{k+1}>n_k$，那么 $\langle f_{n_k}\rangle_{k=1}^{\infty}$ 就是 $\langle f_n\rangle$ 的一个子序列，且若设 $g_1=f_{n_1}$，且当 $k>1$，设 $g_k=f_{n_k}-f_{n_{k-1}}$，那么可以得到一个序列 $\langle g_k\rangle$ 它的 k 重部分和是 f_{n_k}. 但若 $k>1$，则有 $\|g_k\|\leqslant 2^{-k+1}$，因此 [124]

$$\sum\|g_k\|\leqslant\|g_1\|+\sum 2^{-k+1}=\|g_1\|+1.$$

所以级数 $\langle g_k\rangle$ 绝对可和，因而根据假设存在 X 的一个元素 f 使得该级数的部分和收敛于它. 因此子序列 $\langle f_{n_k}\rangle$ 收敛到 f.

接着证明 $f=\lim f_n$. 由于 $\langle f_n\rangle$ 是一个柯西序列，给定 $\varepsilon>0$，存在一个 N 使得对所有大于 N 的 n 与 m，有 $\|f_n-f_m\|<\varepsilon/2$. 由于 $f_{n_k}\to f$，存在一个 K 使得对所有 $k\geqslant K$ 有 $\|f_{n_k}-f\|<\varepsilon/2$. 如果取 k 充分大使得 $k>K$ 且 $n_k\geqslant N$，那么

$$\|f_n-f\|\leqslant\|f_n-f_{n_k}\|+\|f_{n_k}-f\|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

因此对所有 $n>N$ 有 $\|f_n-f\|<\varepsilon$，因而 $f_n\to f$. ■

6. 定理（里斯-菲舍尔） L^p 空间是完备的.

证明 由于 $p=\infty$ 的情形是初等的，我们将它留给读者. 假定 $1\leqslant p<\infty$，根据先前的命题仅需证明每个在 L^p 绝对可和的级数在 L^p 可和于其中的某个元素.

令 $\langle f_n\rangle$ 为 L^p 中满足 $\sum_{n=1}^{\infty}\|f_n\|=M<\infty$ 的序列，定义函数 g_n 为 $g_n(x)=\sum_{k=1}^{n}|f_k(x)|$. 根据闵可夫斯基不等式，有

$$\|g_n\|\leqslant\sum_{k=1}^{n}\|f_k\|\leqslant M.$$

因此

$$\int(g_n)^p\leqslant M^p.$$

对于每个 x，$\langle g_n(x)\rangle$ 是一个递增的（扩充）实数序列，因此必须收敛于某个（扩充）实数 $g(x)$. 如此定义的函数 g 是可测的，且由于 $g_n\geqslant 0$，根据法图引理有 [125]

$$\int g^p\leqslant M^p$$

因此 g^p 是可积的，而且对几乎所有的 x，$g(x)$ 是有限的.

对于每个使 $g(x)$ 有限的 x，级数 $\sum_{k=1}^{\infty}f_k(x)$ 是绝对可和的实数序列，因而必须可和于某个实

数 $s(x)$. 若对于那些使 $g(x)=\infty$ 的 x 设 $s(x)=0$，那么就定义了函数 s 它几乎处处是部分和 $s_n=\sum_{k=1}^{n} f_k$ 的极限. 因此 s 是可测的. 由于 $|s_n(x)|\leqslant g(x)$，因此有 $|s(x)|\leqslant g(x)$. 因而 s 属于 L^p 且有

$$|s_n(x)-s(x)|^p\leqslant 2^p[g(x)]^p.$$

由于 2^pg^p 是可积的，因此对几乎所有 x，$|s_n(x)-s(x)|^p$ 收敛于 0，根据勒贝格收敛定理有

$$\int|s_n-s|^p\to 0$$

因此 $\|s_n-s\|^p\to 0$，这就得到了 $\|s_n-s\|\to 0$. 相应地，级数 $\langle f_n\rangle$ 在 L^p 有和 s. ■

习题

9. 证明每个收敛序列都是柯西序列.
10. 令 $\langle f_n\rangle$ 为 L^∞ 中的函数序列. 证明 $\langle f_n\rangle$ 在 L^∞ 中收敛于 f 当且仅当存在一个零测度集 E 使得 f_n 在 $\widetilde{E}$ 上一致收敛于 f.
11. 证明 L^∞ 是完备的.
12. 证明 l^p 是完备的. $(1\leqslant p<\infty)$(见习题 7).
13. 设 $C=C[0,1]$ 为 $[0,1]$ 上的所有连续函数空间，且定义 $\|f\|=\max|f(x)|$. 证明 C 是一个巴拿赫空间.
14. 用 l^∞ 表示所有有界实数序列空间，且定义 $\|\langle\xi_v\rangle\|_\infty=\sup|\xi_v|$. 证明 l^∞ 是一个巴拿赫空间.
15. 证明所有收敛的实数序列空间 c 和所有收敛到零的实数序列空间 c_0 是巴拿赫空间(具有 l^∞ 范数).
16. 令 $\langle f_n\rangle$ 为 L^p 中的函数序列，$1\leqslant p<\infty$，其几乎处处收敛于 L^p 的函数 f. 证明 f_n 在 L^p 中收敛于 f 当且仅当 $\|f_n\|\to\|f\|$.（若 $p=1$ 这正是习题 4.14b.） [126]
17. 令 $\langle f_n\rangle$ 为 L^p 中的函数序列，$1<p<\infty$，其几乎处处收敛于 L^p 的函数 f，且假定存在一个常数 M 使得对所有的 n 有 $\|f_n\|\leqslant M$. 那么对 L^q 中的每个函数 g 有
$$\int fg=\lim\int f_ng.$$
当 $p=1$ 时，该结果成立吗?
18. 令 $f_n\to f$ 在 L^p 意义下成立，$1\leqslant p<\infty$，且令 $\langle g_n\rangle$ 为可测函数序列，并满足对所有的 n，$|g_n|\leqslant M$ 和 $g_n\to g$ a.e.. 那么在 L^p 中，$g_nf_n\to gf$.

6.4 L^p 空间中的逼近

本节来建立李特尔伍德第二原理的版本，它说的是每个 L^p 中的函数 f，$1\leqslant p<\infty$ “几乎”是一个阶梯函数且“几乎”是一个连续函数：即给定 f 与 $\varepsilon>0$，存在一个阶梯函数 φ 与一个连续函数 ψ 使得 $\|f-\varphi\|_p<\varepsilon$ 和 $\|f-\psi\|_p<\varepsilon$.

若 $\Delta=\{\xi_0,\cdots,\xi_n\}$ 是 $[0,1]$ 上的一个分划，$0=\xi_0<\xi_1<\cdots<\xi_n=1$，则定义阶梯函数 φ_Δ 在该分划的每个区间 $[\xi_k,\xi_{k-1})$ 为常数，且此常数等于 f 在该区间的平均值. 我们将证明当 Δ 的最大子区间的长度 δ 趋于零时，$\|f-\varphi_\Delta\|\to 0$. 在几何应用中用这种特殊方式所生成的阶梯

函数来逼近 f 非常有用.

先从以下一些初等结论开始.

7. 引理　给定 $f\in L^p$，$1\leqslant p<\infty$ 与 $\varepsilon>0$，则存在一个有界可测函数 f_M 使得 $|f_M|\leqslant M$ 且 $\|f-f_M\|<\varepsilon$.

证明　令

$$f_N(x)=\begin{cases}N & N\leqslant f(x)\\ f(x) & -N\leqslant f(x)\leqslant N\\ -N & f(x)\leqslant -N.\end{cases}$$

那么 $|f_N|\leqslant N$，且 $\langle f_N\rangle$ 几乎处处收敛于 f，因而 $|f-f_N|^p\to 0$ 几乎处处成立. 由于

$$|f-f_N|^p\leqslant|f|^p,$$

以及 $|f|^p$ 可积，当 $N\to\infty$ 时，所以有

$$\|f-f_N\|^p=\int|f-f_N|^p\to 0,$$

127

因此 $\|f-f_N\|\to 0$，且存在 M 使得 $\|f-f_M\|<\varepsilon$. ■

8. 命题　给定 $f\in L^p$，$1\leqslant p<\infty$ 且 $\varepsilon>0$，则存在一个阶梯函数 φ 和一个连续函数 ψ 使得 $\|f-\varphi\|_p<\varepsilon$ 且 $\|f-\psi\|_p<\varepsilon$.

证明　根据引理 7，可以选择一个有界函数 f_M 满足 $\|f-f_M\|<\varepsilon/2$. 根据命题 3.22，可以找到一个阶梯函数 φ 使得

$$|f_M-\varphi|<\frac{\varepsilon}{4}$$

在测度小于 δ 的集合 E 外成立，这里

$$\delta=\left(\frac{\varepsilon}{4M}\right)^p.$$

那么

$$\begin{aligned}\|f_M-\varphi\|^p&=\int_0^1|f_M-\varphi|^p\\&=\int_{[0,1]\sim E}|f_M-\varphi|^p+\int_E|f_M-\varphi|^p\\&<\frac{\varepsilon^p}{4^p}+\frac{M^p\varepsilon^p}{4^pM^p}\leqslant\frac{\varepsilon^p}{2^p}.\end{aligned}$$

因此 $\|f_M-\varphi\|<\varepsilon/2$，所以根据闵可夫斯基不等式，有

$$\|f-\varphi\|\leqslant\|f-f_M\|+\|f_M-\varphi\|<\varepsilon$$

ψ 的存在性可从每个阶梯函数 φ 都可以被一个连续函数在 L^p 中逼近这一事实得到. ■

定义　令 $\Delta=\{\xi_0,\xi_1,\cdots,\xi_m\}$ 为有限区间 $[a,b]$ 的一个分划，f 为 $[a,b]$ 上的可积函数，那么如下定义的 $[a,b]$ 上的函数 φ_Δ

$$\varphi_\Delta(x)=\frac{1}{\xi_{k+1}-\xi_k}\int_{\xi_k}^{\xi_{k+1}}f(t)\mathrm{d}t$$

128

称为 f 的平均意义下的 Δ 逼近.

9. 命题　令 $f\in L^p$，那么 f 的 Δ 逼近 φ_Δ 在 L^p 中收敛于 f，即当 Δ 的最长子区间长度 δ 趋于 0 时，$\|f-\varphi_\Delta\|\to 0$.

证明　对于任意 Δ 和任意 $f\in L^p$ 用 $T_\Delta(f)$ 来表示 f 的 Δ 逼近，那么 T_Δ 是一个从 L^p 到某个阶梯函数空间的映射. 该阶梯函数空间是由那些不连续点为 Δ 的分点的阶梯函数构成. 容易证明

$$T_\Delta(f+g)=T_\Delta(f)+T_\Delta(g)$$
$$T_\Delta(\alpha f)=\alpha T_\Delta(f)$$

且

$$\|T_\Delta(f)\|_p\leqslant\|f\|_p.$$

根据命题 8，给定 $\varepsilon>0$，存在一个阶梯函数 φ 使得 $\|f-\varphi\|_p<\varepsilon/3$. $T_\Delta(\varphi)$ 与 φ 仅在那些包含 φ 不连续点的 Δ 的子区间处不同. 令 φ 有 l 个不连续点，$M=\max|\varphi(x)|$，那么

$$\|\varphi-T(\varphi)\|_p^p=\int|\varphi-T(\varphi)|^p\leqslant\delta l(2M)^p,$$

因而

$$\|\varphi-T_\Delta\varphi\|_p\leqslant 2M(\delta l)^{1/p},$$

其中 δ 是 Δ 的最长子区间的长度. 根据闵可夫斯基不等式只要有 $\delta<\left(\frac{\varepsilon}{6M}\right)^p\frac{1}{l}$ 就有

$$\begin{aligned}\|f-T_\Delta f\|&\leqslant\|f-\varphi\|+\|\varphi-T_\Delta\varphi\|+\|T_\Delta(\varphi-f)\|\\&\leqslant 2\|f-\varphi\|+\|\varphi-T_\Delta\varphi\|\\&<\frac{2}{3}\varepsilon+2M(\delta l)^{1/p}\\&<\varepsilon.\end{aligned}$$

■

129

10. 系　当 $\delta\to 0$ 时 f 的 Δ 逼近 φ_Δ 依测度收敛于 f.

习题

19. 证明 $\|T_\Delta f\|_p\leqslant\|f\|_p$.

20. 证明系 10.

6.5 L^p 空间上的有界线性泛函

定义赋范线性空间 X 上的**线性泛函**为从空间 X 到实数集的一个映射 F，该映射满足 $F(\alpha f+\beta g)=\alpha F(f)+\beta F(g)$. 若存在常数 M 使得对于 X 中所有的 f 有 $|F(f)|\leqslant M\cdot\|f\|$，就说线性泛函是**有界**的，并称使得该不等式成立的最小常数 M 为 F 的范数. 因此

$$\|F\|=\sup\frac{|F(f)|}{\|f\|},$$

这里上确界对 X 中所有的非零元素 f 取.

若 g 是 L^q 中的一个函数，那么可以用以下方式定义 L^p 上的一个有界线性泛函 F

$$F(f) = \int fg.$$

显然泛函 F 是线性的，且赫尔德不等式表明 $\|F\| \leqslant \|g\|_q$. 事实上，确有 $\|F\| = \|g\|_q$. 为此，对于 $1<p<\infty$ 的情形，设[⊖]

$$f = |g|^{q/p} \operatorname{sgn} g.$$

那么 $|f|^p = |g|^q = fg$. 因此 f 属于 L^p 且 $\|f\|_p = (\|g\|_q)^{q/p}$. 但是

$$F(f) = \int fg = \int |g|^q$$
$$= (\|g\|_q)^q = \|g\|_q \|f\|_p,$$

因而 $\|F\|$ 至少与 $\|g\|_q$ 一样大. 下面将该结果作为一个命题来叙述；$p=1$ 与 $p=\infty$ 的情形留给读者(见习题 21).

11. 命题 L^q 中的每个函数 g 用以下方式定义了 L^p 上的一个有界线性泛函 F：

$$F(f) = \int fg,$$

则有 $\|F\| = \|g\|_q$.

本节的目标就是证明对于 $1\leqslant p<\infty$ 该命题的逆成立，即可以用这种方式得到 L^p 上的每个有界线性泛函. 我们将发现首先建立以下引理是有用的.

12. 引理 令 g 为[0, 1]上的一个可积函数，且假定存在一个常数 M 使得对所有有界可测函数 f 有

$$\left|\int fg\right| \leqslant M \|f\|_p,$$

那么 g 属于 L^q，且 $\|g\|_q \leqslant M$.

证明 首先假定 $1<p<\infty$. 用以下方式定义一个有界可测函数序列

$$g_n(x) = \begin{cases} g(x) & 若\ |g(x)| \leqslant n \\ 0 & 若\ |g(x)| > n, \end{cases}$$

且令

$$f_n = |g_n|^{q/p} \operatorname{sgn} g_n.$$

现在 $\|f_n\|_p = (\|g_n\|_q)^{q/p}$，且 $|g_n|^q = f_n \cdot g_n = f_n \cdot g$. 因此

$$(\|g_n\|_q)^q = \int f_n g \leqslant M \|f_n\|_p = M(\|g_n\|_q)^{q/p}.$$

由于 $q-q/p=1$，

$$\|g_n\|_q \leqslant M$$

且

$$\int |g_n|^q \leqslant M^q.$$

由于 $|g_n|^q$ 几乎处处收敛于 $|g|^q$，根据法图引理有

⊖ 对任意实数 x 定义当 $x>0$，$\operatorname{sgn} x=1$，$\operatorname{sgn} 0=0$，当 $x<0$，$\operatorname{sgn} x=-1$.

$$\int |g|^q \leqslant \lim \int |g_n|^q \leqslant M^q$$

[131] 因此 $g \in L^q$，且 $\|g\|_q \leqslant M$.

对于 $p=1$ 的情形，令 $E=\{x: |g(x)| \geqslant M+\varepsilon\}$，且设 $f=(\operatorname{sgn} g)\chi_E$，那么 $\|f\|_1 = mE$，且

$$MmE = M\|f\|_1 \geqslant \left|\int fg\right| \geqslant (M+\varepsilon)mE.$$

所以 $mE=0$，且 $\|g\|_\infty \leqslant M$. ■

对于 $1 \leqslant p < \infty$，现在能够给出 L^p 上的有界线性泛函的刻画：

13. 里斯表示定理　令 F 为 L^p 上的一个有界线性泛函，$1 \leqslant p < \infty$，那么存在一个属于 L^q 的函数 g 使得

$$F(f) = \int fg,$$

而且 $\|F\| = \|g\|_q$.

证明　令 χ_s 为区间 $[0, s]$ 的特征函数，可通过观察 F 在 χ_s 的表现来研究 F. 对于每个 s $F(\chi_s)$ 的值都是一个实数 $\Phi(s)$，这就定义了 $[0, 1]$ 上的一个函数 Φ. 下面证明 Φ 绝对连续. 令 $\{(s_i, s'_i)\}$ 为 $[0, 1]$ 上任意不重叠的子区间所构成的有限集簇，其全长小于 δ，那么

$$\sum_i |\Phi(s'_i) - \Phi(s_i)| = F(f),$$

其中

$$f = \sum_i (\chi_{s'_i} - \chi_{s_i}) \operatorname{sgn}(\Phi(s'_i) - \Phi(s_i)).$$

由于 $(\|f\|_p)^p < \delta$，即有

$$\begin{aligned}\sum_i |\Phi(s'_i) - \Phi(s_i)| &= F(f) \\ &\leqslant \|F\| \, \|f\|_p \\ &< \|F\| \delta^{1/p}.\end{aligned}$$

这表明若取 $\delta = \varepsilon^p / \|F\|^p$，则 Φ 在全长为 δ 的任意有限不相交区间集簇的全变差小于 ε.

[132] 因此 Φ 绝对连续.

根据定理 5.14 存在 $[0, 1]$ 上的可积函数 g 使得

$$\Phi(s) = \int_0^s g.$$

因此

$$F(\chi_s) = \int_0^1 g \cdot \chi_s.$$

由于 $[0, 1]$ 上每个阶梯函数都是(除有限个点外) $\sum c_i \chi_{s_i}$ 的一种线性组合，那么对于每个阶梯函数 ψ，根据 F 和积分的线性，必有

$$F(\psi) = \int_0^1 g\psi$$

令 f 为 $[0, 1]$ 上的任意有界可测函数，根据命题 3.22，存在一个几乎处处收敛于 f 的有

界阶梯函数序列$\langle\psi_n\rangle$．由于序列$\langle|f-\psi_n|^p\rangle$一致有界且几乎处处收敛于 0，有界收敛定理表明$\|f-\psi_n\|_p\to0$．因为 F 有界且

$$|F(f)-F(\psi_n)|=|F(f-\psi_n)|$$
$$\leqslant\|F\|\ \|f-\psi_n\|_p,$$

所以必有

$$F(f)=\lim F(\psi_n).$$

由于 $g\psi_n$ 总是小于 $|g|$ 乘以序列$\langle\psi_n\rangle$的一致界，根据勒贝格收敛定理有

$$\int fg=\lim\int g\psi_n$$

因此，对每个有界可测函数 f 一定有

$$\int fg=F(f)$$

而 $|F(f)|\leqslant\|F\|\ \|f\|_p$，因而有 g 属于 L^q 且根据引理 12，$\|g\|_q\leqslant\|F\|$．

这样一来仅需证明对于每个 f 属于 L^p 有 $F(f)=\int fg$．令 f 为 L^p 内的任意一个函数，那么根据命题 8，对每个 $\varepsilon>0$ 存在一个阶梯函数 ψ 使得 $\|f-\psi\|_p<\varepsilon$．由于 ψ 有界，有　[133]

$$F(\psi)=\int\psi g.$$

因此

$$\left|F(f)-\int fg\right|=\left|F(f)-F(\psi)+\int\psi g-\int fg\right|$$
$$\leqslant|F(f-\psi)|+\left|\int(\psi-f)g\right|$$
$$\leqslant\|F\|\ \|f-\psi\|_p+\|g\|_q\|f-\psi\|_p$$
$$<(\|F\|+\|g\|_q)\varepsilon.$$

因为 ε 是任意的数，所以必有

$$F(f)=\int fg.$$

等式由 $\|F\|=\|g\|_q$ 即由命题 11 得到．■

在习题部分要求读者对 l^p，$1\leqslant p<\infty$，c 和 c_0 上的有界线性泛函给出类似的表示．在定理 13.23 中给出了 C 上有界线性泛函的表示．遗憾的是，L^∞（与 l^∞）上的有界线性泛函不存在类似的表示．

习题

21. a. 令 g 为$[0,1]$上的可积函数．证明存在一个有界可测函数 f 使得 $\|f\|\neq0$ 且

$$\int fg=\|g\|_1\cdot\|f\|_\infty.$$

b. 令 g 为有界可测函数．证明对每个 $\varepsilon>0$ 存在一个可积函数 f 使得

$$\int fg \geqslant (\| g \|_\infty - \varepsilon) \| f \|_1.$$

[134] ［提示：f 可取为适当的特征函数.］

22. 找到 l^p 上有界线性泛函的表示，这里 $1 \leqslant p < \infty$.

23. 找到 c 和 c_0 上有界线性泛函的表示.（注意：这些表示是不同的.）

[135] 24. 证明定理 13 所给出的 L^q 中元素 g 是惟一的.

第二部分

抽象空间

第7章 度量空间

7.1 引言

实数系具有两类性质．第一类是代数性质，处理加法、乘法，等等．第二类是与两个数之间的距离以及极限有关的性质．后者称为拓扑或度量性质，本章的目标是在定义了距离概念的一般空间中研究这后一种性质．定义如下：

定义 *一个**度量空间**$\langle X, \rho\rangle$就是一个非空元素的集合X(称为点)与定义在$X\times X$上的实值函数ρ，使得对于所有属于X的x，y与z：*

i. $\rho(x, y)\geqslant 0$；

ii. $\rho(x, y)=0$ 当且仅当 $x=y$；

iii. $\rho(x, y)=\rho(y, x)$；

iv. $\rho(x, y)\leqslant\rho(x, z)+\rho(z, y)$.

*函数ρ称为一个**度量**.*

度量空间的一个明显例子即是具有度量$\rho(x, y)=|x-y|$的实数集$\mathbf{R}$．第二个例子是n维欧几里得空间$\mathbf{R}^n$，其上的点为实数的n元组$x=\langle x_1, \cdots, x_n\rangle$且

139

$$\rho(x,y) = [(x_1-y_1)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2]^{1/2}.$$

对于$\mathbf{R}^n$，度量性质(iv)即为三角形的一边长度小于其余两边的长度之和．因此，(iv)通常称为三角不等式.

度量空间的另一个例子是上一章的赋范线性空间，其度量为

$$\rho(x,y) = \|x-y\|,$$

对于该空间，三角不等式等价于$\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$.

必须强调度量空间并不仅仅是点集X，这是因为事实上一对$\langle X, \rho\rangle$是由其点集与度量ρ组成的．例如，n元组实数集采用以下度量ρ^*也可成为一个度量空间.

$$\rho^*(x,y) = |x_1-y_1|+\cdots+|x_n-y_n|,$$

而这个度量空间不同于$\mathbf{R}^n$(若$n>1$)．通常我们感兴趣的只是给定点集的一个度量，因而在这种情形下，有时用记号X同时既表示点集又表示度量空间$\langle X, \rho\rangle$.

若有两个度量空间$\langle X, \rho\rangle$与$\langle Y, \sigma\rangle$，则可构造出一个新的度量空间称为**笛卡儿积**$X\times Y$，其点集为集合$X\times Y=\{\langle x, y\rangle: x\in X, y\in Y\}$，度量$\tau$为

$$\tau(\langle x_1,y_1\rangle,\langle x_2,y_2\rangle) = [\rho(x_1,x_2)^2+\sigma(y_1,y_2)^2]^{1/2}.$$

容易证明τ满足对一个度量所要求的所有性质且$\mathbf{R}^m\times\mathbf{R}^n=\mathbf{R}^{m+n}$．在第7.5节讨论$X\times Y$的其他度量.

若E是度量空间$\langle X, \rho\rangle$的任意非空子集，定义E的**直径**为扩充实数$\sup\{\rho(x, y): x, y\in E\}$.

度量空间的任意非空子集本身也是一个度量空间，若把度量限制在其上的话．例如，上一

章的空间 C 就是 L^{∞} 的子空间.

有时将 $\rho(x, y)=0$ 的条件减弱为仅当 $x=y$ 是方便的. 当允许 $\rho(x, y)=0$ 对于某些 $x\neq y$ 成立时，则称 ρ 是一个**伪度量**. 因此 L^p 范数是 p 次幂可积的可测函数空间上的伪度量. 同样，允许 ρ 取 $+\infty$ 值有时也是方便的，这种情形称 ρ 为**扩充度量**(或扩充伪度量). 伪度量和扩充度量的性质及例子可从习题 3、8 与 11 中找到. [140]

习题

1. a. 证明在以下度量中所有 n 元实数组全体构成一个度量空间：

$$\rho^*(x,y)=|x_1-y_1|+\cdots+|x_n-y_n|$$

$$\rho^+(x,y)=\max\{|x_1-y_1|,\cdots,|x_n-y_n|\}.$$

   b. 对于 $n=2$ 和 $n=3$ 描述集合 $\{x: \rho(x, y)<1\}$，$\{x: \rho^*(x, y)<1\}$，与 $\{x: \rho^+(x, y)<1\}$.

2. 谈到以 x 为心以 δ 为半径的**球**(或球体)，所指的是集合

$$S_{x,\delta}=\{y:\rho(x,y)<\delta\}.$$

   证明若 $0<\varepsilon<\delta-\rho(x, z)$，则 $S_{z,\varepsilon}\subset S_{x,\delta}$.

3. a. *伪度量*. 一对 $\langle X, \rho\rangle$ 称为一个伪度量空间，若 ρ 是伪度量. 证明若 $\rho(x, y)=0$ 是一个等价关系，且若 X^* 是在此关系下的等价类的集合，则 $\rho(x, y)$ 仅依赖于 x 和 y 的等价类并且定义了 X^* 上的一个度量.

   b. *扩充度量*. 令 ρ 为集合 X 上的扩充度量. 证明关系 $\rho(x, y)<\infty$ 是一个等价关系，即它是自反、对称与传递的. X 在此度量下的等价类 X_α 有时称为扩充度量空间 (X, ρ) 的部分. 证明每个部分都是既开又闭.

7.2 开集与闭集

显而易见实数集的许多性质都适用于度量空间的集合，本节所提到的集合都是某个给定度量空间 $\langle X, \rho\rangle$ 的子集. 以下的命题与定义都对应于 2.5 节中的那些命题与定义，因此要求读者检验那些命题的证明适用于度量空间.

定义 集合 O 称为**开的**，若对于每个 $x\in O$，存在 $\delta>0$ 使得所有满足 $\rho(x, y)<\delta$ 的 y 属于 O. [141]

1. 命题 集合 X 和 $\varnothing$ 是开的；任意两个开集的交集是开的；任意开集簇的并集是开的.

定义 点 $x\in X$ 称为集合 E 的**闭包点**，若对于每个 $\delta>0$ 存在一点 $y\in E$ 使得 $\rho(x, y)<\delta$. 用 $\overline{E}$ 表示 E 的闭包点集. 显然，$E\subset\overline{E}$.

2. 命题 若 $A\subset B$，则 $\overline{A}\subset\overline{B}$. 同时 $(\overline{A\cup B})=\overline{A}\cup\overline{B}$，且

$$(\overline{A\cap B})\subset\overline{A}\cap\overline{B}.$$

定义 集合 F 称为**闭的**，若 $\overline{F}=F$.

3. 命题 任意集合 E 的闭包 $\overline{E}$ 是闭的；即 $\overline{E}=\overline{\overline{E}}$.

4. 命题 集合 $\varnothing$ 和 X 是闭的；任意两个闭集的并集是闭的；任意闭集簇的交集是闭的.

5. 命题 开集的补集是闭的，闭集的补集是开的.

定义 度量空间 X 称为**可分的**，若它有由可数个点构成的稠密子集 D，即 $\overline{D}=X$.

由于有理数集是 $\mathbf{R}$ 的可数稠密子集，易见 $\mathbf{R}$ 是可分的. 以下命题表明林德勒夫定理对于某个度量空间成立当且仅当该度量空间可分.

6. 命题　度量空间 X 是可分的当且仅当存在一个可数开集族$\{O_i\}$使得对于任何开集 $O\subset X$，

$$O=\bigcup_{O_i\subset O} O_i.$$

证明　若 X 是可分的，令 D 为可数稠密集. 至于 x 的半径为 δ 的球，指的是集合

142

$$S_{x,\delta}=\{y:\rho(x,y)<\delta\}.$$

令$\{O_i\}$是由那些中心 x 在 D 内且 δ 为有理数的球 $S_{x,\delta}$所组成的簇，那么$\{O_i\}$是一个可数开集簇. 若 O 是任何开集且 $y\in O$，则要证明对某个 O_i 有 $y\in O_i\subset O$. 由于 O 是开的，因此存在一个球 $S_{y,\delta}$使得 $S_{y,\delta}\subset O$. 将 δ 取得更小，可以假定 δ 是有理数. 由于 y 是 D 的闭包点，因此存在点 $x\in D$ 使得 $\rho(x,y)<\delta/2$. 因此

$$S_{x,\delta/2}\subset S_{y,\delta}\subset O.$$

但 $S_{x,\delta/2}$是$\{O_i\}$中的一个集合，因而定理的"仅当"部分证明完毕.

另一方面，假定有了可数簇$\{O_i\}$. 令 x_i 为 O_i 的点，D 为所有这些点 x_i 的集合. 易见 D 是稠密的. 令 x 为 X 的任意点且 S 是任意中心在 x 的球，那么就必须证明 S 包含 D 的点. 但 S 是一个开集(习题 6)，因而必有某个 O_i 使得 $x_i\in O_i\subset S$. 因此 $x_i\in S$，可见 $x\in\overline{D}$. ■

我们称包含 x 的一个球(或更一般的一个开集)是度量空间中点 x 的一个**邻域**.

习题

4. a. 证明 C 是 L^∞ 的一个闭子集(见第 6 章).
   b. 证明在 $0\leqslant t<\frac{1}{2}$消失的所有可积函数的集合是 L^1 的一个闭子集.
   c. 证明所有满足$\int x<1$ 的可测函数 $x(t)$ 组成的集合是 L^1 的一个开子集.
5. 证明 $\overline{E}=\bigcap_{E\subset F}F$ 是 F 的闭子集. 集合 E 的内部 E°是那些 $y\in E$ 且满足存在一个 $\delta>0$ 使得 $\rho(y,z)<\delta\Rightarrow z\in E$ 的点集.
   a. 证明
   $$E^\circ=\bigcup_{O\subset E}O.$$
   b. 证明
   $$\sim(\overline{E})=(\sim E^\circ).$$
6. a. 证明每个球都是开的.

143

   b. 证明集合$\{x:\rho(x,y)\leqslant\delta\}$是闭的.
   c. (b)中的集合是否总是球
   $$\{x:\rho(x,y)<\delta\}$$
   的闭包?
7. 空间 $\mathbf{R}^n$，C，L^∞，L^1 哪些是可分的?

7.3　连续函数与同胚

从度量空间$\langle X,\rho\rangle$到度量空间$\langle Y,\sigma\rangle$的函数 f 是这么一个规则：它将每个 $x\in X$ 赋予惟一的 $y\in Y$. 我们也称 f 为从 X 到 Y 的映射，并将交互地使用函数和映射这两个术语. 谈到从 X 到 Y 的映射 f 是**映上**的，指的是，像往常一样，对任意 $y\in Y$ 存在某个 $x\in X$ 使得 $f(x)=y$;

也就是说，Y 是 f 的值域，那么如同第 2.6 节，就有以下的定义和命题：

定义 函数 f 称为在点 x 连续，若对于每个 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得若 $\rho(x, y)<\delta$，则 $\sigma[f(x), f(y)]<\varepsilon$. 若函数 f 在每个 $x\in X$ 连续就称它为**连续**.

7. 命题 从度量空间 X 到度量空间 Y 的函数 f 是连续的当且仅当对于每个属于 Y 的开集 O，集合 $f^{-1}[O]$ 是 X 的一个开集.

8. 命题 若 f 是从 X 到 Y 的连续映射，且 g 是从 Y 到 Z 的连续映射，则从 X 到 Z 的映射 $g\circ f$ 也是连续映射.

对于 X **映上** Y 的一对一的映射 f，若 f 连续且 f 的逆 f^{-1} 也是连续的，则称它为 X 与 Y 间的**同胚**. 若空间 X 和 Y 之间存在一个同胚，就称它们是同胚的. 拓扑学本质上研究的就是那些在同胚下保持不变的性质，而把这样的性质称之为拓扑的. 根据命题 7，X 与 Y 间的一一对应是一个同胚当且仅当它将 X 的开集映到 Y 的开集，并且将 Y 的开集映到 X 的开集. 因此一个空间的开子集的性质是一个拓扑性质. 由于闭集是开集的补集，所以闭子集也是拓扑性质. 事实上，[144] 每个可以根据开集定义的性质都是一个拓扑性质，因此连续函数是一个拓扑性质：即若 f 是 X 上的一个连续函数，且 h：$X\to Y$ 是 X 与 Y 间的同胚，则 $f\circ h^{-1}$ 是 Y 上的一个连续函数.

然而并非所有度量空间的性质在同胚下都保持不变. 例如，通常在同胚下两点距离会变化. 而使得距离保持不变的同胚，即

$$\sigma[h(x_1),h(x_2)]=\rho(x_1,x_2)$$

对于所有 X 中的 x_1 和 x_2 成立，称为 X 与 Y 之间的**等距同构**. 空间 X 和 Y 称为等距的，若它们之间存在一个等距同构. 从抽象的观点来看，两个等距的度量空间是非常相同的，一个等距同构只不过是点的重新标记. 因此，自然而产生的概念是等价度量：同一点集 X 上的两个度量 ρ 和 σ 称为**等价**若从 $\langle X, \rho\rangle$ 到 $\langle X, \sigma\rangle$ 映上的恒同映射是一个同胚. 因此两个度量等价当且仅当它们定义相同的开集，即一个集合在其中一个度量空间是开的，则在另一个也是开的.

习题

8. 证明定义在 $[0, 1)$ 上的函数 $h(x)=x/(1-x)$ 是 $[0, 1)$ 与 $[0, \infty)$ 之间的同胚.

9. 令 E 是一个集合，x 是度量空间的一个点. 定义

$$\rho(x,E)=\inf_{y\in E}\rho(x,y).$$

   a. 证明对于一个固定的 E，由 $f(x)=\rho(x, E)$ 所给出的函数 f 是连续的.

   b. 证明 $\{x: \rho(x, E)=0\}=\bar{E}$.

10. a. 证明集合 X 上的两个度量等价当且仅当给定 $x\in X$ 和 $\varepsilon>0$，存在一个 $\delta>0$ 使得对所有 $y\in X$

$$\rho(x,y)<\delta\Rightarrow\sigma(x,y)<\varepsilon$$

且

$$\sigma(x,y)<\delta\Rightarrow\rho(x,y)<\varepsilon.$$

[145]

   b. 证明 n 元实数组的以下几个度量是等价的：

$$\rho(x,y)=[(x_1-y_1)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2]^{1/2}$$

$$\rho^*(x,y)=|x_1-y_1|+\cdots+|x_n-y_n|$$

$$\rho^{+}(x,y)=\max\{|x_1-y_1|,\cdots,|x_n-y_n|\}.$$

c. 找到一个与 n 元实数组这些度量不等价的度量.

11. a. 证明若 ρ 是集合 X 的任意度量，则 $\sigma=\rho/(1+\rho)$ 是 X 的一个等价度量. 证明 $\langle X,\sigma\rangle$ 是一个有界度量空间；即对所有属于 X 的 x 和 y，$\sigma(x,y)\leqslant 1$.

    b. 证明这对于伪度量和扩充度量也都成立.

7.4 收敛性与完备性

正如同实数的情形，我们说度量空间 x 的序列 $\langle x_n\rangle$ **收敛**于 X 中的点 x（或以 x 为极限），若给定 $\varepsilon>0$，存在一个 N 使得 $\rho(x,x_n)<\varepsilon$ 对所有 $n\geqslant N$ 都成立. 该定义也可以用几何语言重述为：$\langle x_n\rangle$ 收敛于 x. 若关于 x 的每个球包含了该序列除有限项外的一切项.

通常写 $x=\lim x_n$ 或 $x_n\to x$ 来表示 x 是 $\langle x_n\rangle$ 的极限. 若仅有较弱的条件：每个关于 x 的球包含该序列的无限项，则说 x 是 $\langle x_n\rangle$ 的聚点. 因此若对于给定的 $\varepsilon>0$ 和给定的 N，存在 $n\geqslant N$ 使得 $\rho(x,x_n)<\varepsilon$，那么 x 就是 $\langle x_n\rangle$ 的聚点. 所以若 x 是 $\langle x_n\rangle$ 的极限点，则 x 是 $\langle x_n\rangle$ 的聚点，但反过来却不一定成立. 下面在习题部分给出了有关聚点与极限的一些性质.

度量空间的序列 $\langle x_n\rangle$ 称为**柯西序列**，若给定 $\varepsilon>0$ 存在 N 使得对所有大于 N 的 n 和 m，有 $\rho(x_n,x_m)<\varepsilon$. 若 $\langle x_n\rangle$ 收敛于某点 x，那么给定 $\varepsilon>0$，可以选取足够大的 N 使得 $\rho(x_n,x)<\varepsilon/2$ 对于 $n\geqslant N$ 成立. 因此对所有 n，$m\geqslant N$，有

$$\rho(x_n,x_m)\leqslant\rho(x_n,x)+\rho(x_m,x)<\varepsilon,$$

因而 $\langle x_n\rangle$ 是一个柯西序列. 反之每个柯西序列收敛对于任意度量空间不一定成立（例如通常度量下的有理数空间）. 若一个度量空间具有每个柯西序列收敛（于该空间的某点）这样一个性质，则称该空间是**完备的**. 关于实数的柯西准则仅仅表明实数空间 $\mathbf{R}$ 是完备的. 有关完备空间的其他例子由在第 6 章讨论的巴拿赫空间给出.

[146]

若 X 是一个不完备的度量空间，它总是可被扩大而成完备. 以下定理就给出这一事实的精确陈述. 其证明概要由习题 17 与习题 10.16 给出.

9. 定理 若 $\langle X,\rho\rangle$ 是一个不完备度量空间，那么可以找到一个完备度量空间 X^*，使得 X 可作为一个稠密子集等距嵌入它. 若 X 包含于任意完备空间 Y，则 X^* 等距于 X 在 Y 的闭包.

习题

12. 证明度量空间序列 $\langle x_n\rangle$ 以 x 为聚点当且仅当它有收敛到 x 的子序列 $\langle x_{n_k}\rangle$.

13. 证明度量空间序列 $\langle x_n\rangle$ 收敛到 x 当且仅当它的每个子序列以 x 为聚点. 因此若 $\langle x_n\rangle$ 的每个子序列照样都有收敛到 x 的子序列，则 $\langle x_n\rangle$ 收敛于 x.

14. 令 E 为度量空间 X 的一个集合. 若 x 是 E 中序列的聚点，则 $x\in\bar{E}$，而若 $x\in\bar{E}$，则 E 中存在一个收敛到 x 的序列.

15. 若度量空间的柯西序列 $\langle x_n\rangle$ 以 x 为聚点，则 $\langle x_n\rangle$ 收敛到 x.

16. 若 X 和 Y 是两个度量空间，且 f 是从 X 到 Y 的映射，那么 f 在 x 连续当且仅当对于 X 中每个收敛到 x 的序列 $\langle x_n\rangle$，有 $\langle f(x_n)\rangle$ 收敛到 Y 中的 $f(x)$.

17. a. 若$\langle x_n\rangle$和$\langle y_n\rangle$是度量空间X的柯西序列，那么$\rho(x_n, y_n)$收敛.

 b. 度量空间X的所有柯西序列组成之集是一个伪度量空间(参见习题3)，若$\rho^*(\langle x_n\rangle, \langle y_n\rangle)=\lim\rho(x_n, y_n)$.

 c. 若将使$\rho^*=0$的元素视为相同，则这个伪度量空间成为度量空间X^*(如同习题3)，且X等距嵌入X^*.

 d. 度量空间$\langle X^*, \rho^*\rangle$是完备的. [提示：若$\langle x_n\rangle$是$X$的柯西序列，可以假定(通过取子序列)$\rho(x_n, x_{n+1})<2^{-n}$. 若$\langle\langle x_{n,m}\rangle_{n=1}^{\infty}\rangle_{m=1}^{\infty}$可表示$X^*$的一个柯西序列，那么序列$\langle x_{n,n}\rangle_{n=1}^{\infty}$是$X$中那些可表示为$X^*$中柯西序列极限的柯西序列.] 147

 e. 用下面两节中的命题10，11和12证明定理9.

18. 证明两个完备度量空间的笛卡儿积是完备的.

7.5 一致连续性与一致性

令f为从度量空间$\langle X, \rho\rangle$到度量空间$\langle Y, \sigma\rangle$的映射. 若给定$\varepsilon>0$存在一个$\delta>0$，使得对X中的所有x和x'，若满足$\rho(x, x')<\delta$有$\sigma(f(x), f(x'))<\varepsilon$，则称$f$是**一致连续的**. 定义在$[0, 1)$上的函数$h(x)=x/(1-x)$连续但不是一致连续的. 此外，$h$将柯西序列$x_n=1-1/n$映为$y_n=n-1$，而后者不是一个柯西序列. 因此柯西序列在连续函数上的像不一定是柯西序列. 然而，还是有以下命题：

10. 命题 令f为从度量空间X到度量空间Y的一致连续映射. 若$\langle x_n\rangle$是X中的一个柯西序列，则$\langle f(x_n)\rangle$是Y中的一个柯西序列.

度量空间X与Y间的同胚f称为**一致同胚**，若f和f^{-1}都是一致连续的. 根据命题10，如同完备性，柯西序列性质在一致同胚下保持不变. 在一致同胚下保持不变的性质称为一致性质. 除柯西序列与完备性外，还有一致连续这个一致性质. 这三个性质都不是拓扑性质. 这是因为函数$h(x)=x/(1-x)$是不完备空间$[0, 1)$与完备空间$[0, \infty)$之间的同胚. 它将柯西序列映入非柯西序列，而且它的逆将一致连续函数sin拉回到$[0, 1)$上非一致连续的函数.

点集X的两个度量ρ和σ称为**一致等价**，若从$\langle X, \rho\rangle$到$\langle X, \sigma\rangle$的恒同映射是一致同胚. 若给定$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$使得对所有x和y，有$\rho(x, y)<\delta\Rightarrow\sigma(x, y)<\varepsilon$并且$\sigma(x, y)<\delta\Rightarrow\rho(x, y)<\varepsilon$，则$\rho$和$\sigma$一致等价. 148

令$\langle X, \rho\rangle$与$\langle Y, \sigma\rangle$为两个度量空间，定义笛卡儿积$X\times Y$上的度量ρ_1和ρ_∞如下

$$\rho_1(\langle x,y\rangle,\langle x',y'\rangle)=\rho(x,x')+\sigma(y,y')$$

$$\rho_\infty(\langle x,y\rangle,\langle x',y'\rangle)=\max[\rho(x,x'),\sigma(y,y')].$$

具有以上度量之一的乘积$X\times Y$称为具有l_1(或l_∞)乘积度量. 显而易见这些度量中的每一个**一致**等价于$X\times Y$上通常的乘积度量. 这些度量常常比普通的乘积度量更便于使用，其定义使得$\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^m$与$\mathbf{R}^{m+n}$等距.

下面给出对一致连续映射有用的延拓定理来结束本节，命题的证明留给读者.

11. 命题 令$\langle X, \rho\rangle$与$\langle Y, \sigma\rangle$为度量空间且Y完备，令f为从X的子集E到Y的一致连续映射，那么存在惟一的从E到$\bar{E}$的f的延拓g，即存在惟一的从$\bar{E}$到Y连续映射g，使得

对于 $x \in E$，$g(x)=f(x)$，此外，g 是一致连续的.

习题

19. 证明 ρ_1 和 ρ_∞ 是度量并且每个都一致等价于 $X \times Y$ 上通常的乘积度量.
20. 证明命题 10.
21. 用以下步骤证明命题 11：
    a. 若 E 的序列 $\langle x_n \rangle$ 收敛于点 $x \in \bar{E}$，则 $\langle f(x_n) \rangle$ 收敛于点 $y \in Y$（参见命题 10).
    b. (a)中的点 y 仅依赖于 x 而不依赖于序列 $\langle x_n \rangle$. 因此，若定义 $y=g(x)$，那么就定义了 $\bar{E}$ 上的函数 g 且其为 f 的一个延拓.
    c. 函数 g 在 $\bar{E}$ 上一致连续.
    d. 若 h 是任意从 $\bar{E}$ 到 Y 的连续函数，且在 E 上与 f 一致，则 $h \equiv g$.

[149]

22. a. 证明命题 10b 中的那些度量是一致等价的.
    b. 找到与 n 元实数组度量等价但与通常度量不一致等价的度量.
    c. 若 $\langle X, \rho \rangle$ 是任意度量空间，那么度量 $\sigma=\rho/(1+\rho)$ 一致等价于 ρ.
23. a. 有界性是度量性质但不是一致性质（见习题 22c).
    b. 度量空间 X 称为全有界的，若给定 $\varepsilon>0$ 存在有限个半径为 ε 的球覆盖 X（即其并集为 X). 证明全有界性是一个一致性质.
    c. 证明全有界性不是一个拓扑性质. [考虑[0, 1)和[0, ∞).]
    d. 证明每个全有界的度量空间可分.
24. 令 $\langle X_k, \rho_k \rangle$ 为度量空间的序列，定义它们的直积为

$$Z = \bigtimes_{k=1}^{\infty} X_k$$

这里令 Z 为所有满足 $x_k \in X_k$ 的序列 $\langle x_k \rangle$ 所构成的空间，且定义一个 Z 上的度量 τ

$$\tau(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \rho_k^* (x_k, y_k),$$

其中 $x=\langle x_k \rangle$，$y=\langle y_k \rangle$ 且 $\rho_k^* = \rho_k/1+\rho_k$. 在 $\langle X_k, \rho_k \rangle$ 全都为同一空间 $\langle X, \rho \rangle$ 的特殊情形下，那么所讨论的就是 X 中的序列，通常用

$$X^{\omega} \quad 或 \quad X^{\mathbf{N}}$$

来代替 $\bigtimes_{k=1}^{\infty} X_k$.

a. 证明 τ 是一个度量且 Z 中的序列 $\langle x^{(n)} \rangle$ 收敛到 $x \in Z$ 当且仅当对于每个 k，$x_k^{(n)}$ 收敛到 x_k.
b. 证明若每个 $\langle X_k, \rho_k \rangle$ 是完备的则 (Z, τ) 也是完备的.
c. 假定对于每个 k 空间 $\langle X_k, \rho_k \rangle$ 和 $\langle Y_k, \sigma_k \rangle$ 是同胚的，那么空间

$$\bigtimes X_k \quad 和 \quad \bigtimes Y_k.$$

也是同胚的.

[150]

d. 将(c)推广到一致同胚的情形.

7.6 子空间

若$\langle X, \rho\rangle$是一个度量空间且S是X的一个子集，那么若将ρ限制于S，也就是说，如果取S两点的距离作为X点的距离，则S成为一个度量空间．当我们将S考虑为具有该度量的度量空间时，可称S是X的一个子空间．例如，有理数是$\mathbf{R}$的一个子空间，集合$\{\langle x, 0\rangle\}$是等距于$\mathbf{R}$的$\mathbf{R}^2$的子空间．空间C是L^∞的子空间．

若E是S的子集，则可以考虑E在S或E在X的闭包；即考虑S的那些E闭包的点集或X的那些E闭包的点集．这些集合一般是不同的，例如，令X为空间$\mathbf{R}$而S为区间$(0, 1)$，那么若E是区间$(0, \frac{1}{2}]$，那么E在$\mathbf{R}$的闭包是区间$[0, \frac{1}{2}]$，而在S的闭包恰是区间$(0, \frac{1}{2}]$；即E相对于S闭．因此可知集合的闭包性质正如同其闭与开的性质，全都是相对于包含该集合的空间的性质．无论如何，有以下关于这些概念的联系．

12. 命题 *令X为度量空间且S是它的子空间，那么E相对于S的闭包是$\bar{E}\cap S$，其中$\bar{E}$表示E在X的闭包．一个集合$A\subset S$相对于S闭当且仅当$A=S\cap F$，其中F是X的闭集．一个集合$A\subset S$相对于S开当且仅当$A=S\cap O$，其中O是X的开集．*

证明 若x是E在X闭包上的点，则若它属于S它就是E在S闭包的点，因此E在S的闭包是$\bar{E}\cap S$．若A在S闭，那么必有$A=S\cap\bar{A}$，另一方面若F在X内闭，则$S\cap F$在S的闭包是

$$S\cap(\overline{S\cap F})\subset S\cap(\bar{S}\cap\bar{F})\subset S\cap F,$$

这表明$S\cap F$相对于S闭．

若A相对于S开，则$S\sim A$相对S闭且有$S\sim A=S\cap F$，或$S\cap A=S\cap(\sim F)$以及$\sim F$在X开．类似地，若O是开的，则$S\cap O$是$S\cap(\sim O)$在S的补集，其在S是闭的． ■ 151

13. 命题 *可分度量空间的每个子空间都是可分的．*

证明 令X是一个可分度量空间且S是X的一个子空间，那么根据命题6，存在一个X的可数开集簇$\{O_i\}$使得X的每个开集是$\{O_i\}$某些子簇的并集．根据命题12，集簇$\{O_i\cap S\}$是S的可数开子集簇，且使得S的每个开子集是它子簇的并集．因此据命题6，S是可分的． ■

与上面所讨论的相对性质不同，存在着一些内在的性质．例如，x为E的闭包点这一性质若在X的某个包含x和E的子空间成立，则它在X的任意包含x和E的子空间也成立．另一如此的性质是完备性，这是由于空间的完备性主要是根据该空间的点来定义的．然而，以下命题给出了完备集与闭集的关系．

14. 命题 *若度量空间X的子集A是完备的，则它是闭的．另一方面，完备度量空间的闭子集本身是完备的．*

习题

25. 证明命题14．［提示：习题14很有用．］

26. 令O为完备度量空间$\langle X, \rho\rangle$的开子集．证明对于O存在一个有界度量σ，其等价于O上的度

量 ρ，且(O, σ)是一个完备度量空间. [提示：对每个 $x\in O$，令 $\varphi(x)=[\rho(x, \tilde{O})]^{-1}$，那么$\{\langle x, y\rangle: x\in O, y=\varphi(x)\}$是 $X\times\mathbf{R}$ 的闭子集，并因此是 $X\times\mathbf{R}$ 的完备子集. 利用习题 19 和 22c.]

7.7 紧度量空间

由海涅-博雷尔定理可以得到[0，1]区间的许多重要性质. 我们引入一类度量空间，海涅-博雷尔定理在该空间成立，并且能够证明[0，1]区间的许多重要性质在该空间也成立，这类空间称为紧空间. 为给出一个确切的定义，我们说度量空间的开集簇$\mathcal{U}$是集合 K 的一个开覆盖若 K 包含在$\mathcal{U}$中集合的并集. 度量空间 X 称为**紧的**若 X 的每个开覆盖$\mathcal{U}$有一个有限子覆盖，即若存在一个有限簇$\{O_1, O_2, \cdots, O_N\}\subset\mathcal{U}$使得 $X=\bigcup_{i=1}^{N} O_i$. 度量空间的子集 K 称为紧的若它作为 X 的子空间是紧的. 注意到命题 12 的最后一个陈述，这等价于说 X 的子集 K 是紧的若 X 的开集 K 的每个覆盖$\mathcal{U}$有一个有限子覆盖. 海涅-博雷尔定理说的是实数集的每个闭有界子集是紧的.

[152]

若$\mathcal{U}$是空间 X 的开覆盖，则它每个集合的补集组成交为空的闭集簇$\mathcal{F}$，反之亦然. 因此一个空间 X 是紧的当且仅当每个交集为空集的闭集簇都有一个交集为空的有限子簇. 我们说 X 中的集簇$\mathcal{F}$具有有限交性质若$\mathcal{F}$的任何有限子集簇有非空交. 因此有以下命题：

15. 命题 *度量空间 X 是紧的当且仅当每个具有有限交性质的闭集簇$\mathcal{F}$有一个非空交集.*

[0，1]区间的另一重要性质可推广如下：一个空间 X 称为具有**波尔查诺-魏尔斯特拉斯性质**，若 X 的每个无限序列$\langle x_n\rangle$至少有一个聚点，即若存在一个 $x\in X$ 使得对每个包含 x 的开集与每个 N 有一个 $n\geqslant N$ 且 $x_n\in O$.

16. 引理 *紧空间具有波尔查诺-魏尔斯特拉斯性质.*

证明 令$\langle x_i\rangle$为 X 中的序列，且令 $B_n=\{x_n, x_{n+1}, \cdots\}$，那么$\{\bar{B}_n\}$是一个具有有限交性质的闭集簇. 因此存在一个 x 使得 $x\in\bigcap\bar{B}_n$. 而这个 x 就是序列$\langle x_i\rangle$的聚点. ■

另一个与紧相关的性质是序列紧性：空间 X 称为*序列紧的*若 X 中的每个序列$\langle x_n\rangle$包含一个收敛的子序列$\langle x_{n_k}\rangle$.

[153]

17. 引理 *度量空间 X 具有波尔查诺-魏尔斯特拉斯性质当且仅当它是序列紧的.*

证明 由于$\langle x_n\rangle$每个子序列的极限是序列$\langle x_n\rangle$的聚点，所以序列紧性蕴涵着波尔查诺-魏尔斯特拉斯性质. 反之，若$\langle x_n\rangle$有聚点 x，则对于每个 k 可以找到 $n_k>n_{k-1}$使得半径为 $1/k$ 的球 x 包含 x_{n_k}. 那么 $x_{n_k}\to x$. 因此一个具有波尔查诺-魏尔斯特拉斯性质的空间是序列紧的. ■

稍后将要证明(定理 21)一个序列紧的度量空间是紧的. 因此对于度量空间而言，紧性、序列紧性与波尔查诺-魏尔斯特拉斯性质这三个概念是等同的. 然而，当只考虑一般的拓扑空间时，将会证明它们是不同的概念. 接着要建立有关紧度量空间的一些重要性质. 必须注意，直到定理 21，它们所依赖的只是显然较弱的序列紧性的假设.

18. 定理 *令 f 为定义在(序列)紧空间上的连续实值函数，那么 f 有界并且取到它的最大值与最小值.*

证明 令 $M=\sup\{f(x): x\in X\}$，那么（即使 $M=\infty$）存在 X 的一个点列 $\langle x_n\rangle$ 使得 $M=\lim f(x_n)$. 由于 X 是序列紧的，所以存在一个子序列 $\langle x_{n_k}\rangle$ 收敛到点 $z\in X$，那么 $f(z)=\lim f(x_{n_k})=M$，因此 M 是一个实数（即不是 ∞）且 $f(z)=M$. 故而 M 为 f 的最大值且 f 在 z 点取到它. 用 $-f$ 代替 f 即可得到定理的另一半. ■

度量空间 X 称为全有界的，若对于每个 $\varepsilon>0$，存在有限点簇 $\{x_1, \cdots, x_n\}$ 使得每个 $x\in X$ 与某个 x_k 的距离不超过 ε. 这等价于说，对每个 $\varepsilon>0$ 空间 X 被有限个半径为 ε 的球覆盖.

19. 引理 *序列紧的度量空间是全有界的.*

证明 假定 X 不是全有界的，那么对于某个 $\varepsilon>0$ 就不能用有限个半径为 ε 的球覆盖 X. 所以依次选取 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 使得对于 $n>k$，$\rho(x_n, x_k)\geqslant\varepsilon$，那么序列 $\langle x_n\rangle$ 就没有收敛子序列，这是由于它的任何两项距离都大于或等于 ε. 因此 X 不是序列紧的，由逆否关系知引理得证. ■ 154

若 $\mathfrak{U}$ 是度量空间 X 的一个开覆盖，则每个 $x\in X$ 都包含于某个开集 $O\in\mathfrak{U}$，且对于某个 $\delta>0$ 存在 x 的一个球 $B_{x,\delta}$ 包含在 O 内. 以下命题表明对于一个（序列）紧的度量空间该性质一致成立，即一定能够找到与 x 无关的 δ. 命题中所叙述的具有该性质的数 ε 被称为覆盖 $\mathfrak{U}$ 的勒贝格数. 该命题的证明留给读者（习题 29）.

20. 命题 *令 $\mathfrak{U}$ 为（序列）紧空间 X 的开覆盖，那么存在一个数 $\varepsilon>0$，使得对于每个 $x\in X$ 与每个 $\delta<\varepsilon$，球 $B_{x,\delta}$ 包含在某个开集 $O\in\mathfrak{U}$ 内.*

21. 定理（博雷尔-勒贝格） *令 X 为度量空间，那么以下命题等价：*

i. *X 是紧的.*

ii. *X 具有波尔查诺-魏尔斯特拉斯性质.*

iii. *X 是序列紧的.*

证明 根据引理 16 和 17，已经证明了 (i) ⇒ (ii) ⇔ (iii). 为证明 (iii) ⇒ (i)，假设 X 是序列紧的且 $\mathfrak{U}$ 是 X 的开覆盖. 令 ε 为由命题 20 给出的 $\mathfrak{U}$ 的勒贝格数，且取 δ 使得 $0<\delta<\varepsilon$. 根据引理 19，X 是全有界的，因而能找到有限个半径为 δ 的球 $B_{x_1,\delta}, \cdots, B_{x_n,\delta}$，它们覆盖 X. 由于每个球 $B_{x_k,\delta}$ 包含于某个集合 $O_k\in\mathfrak{U}$，所以集簇 $\{O_1, \cdots, O_n\}$ 是覆盖 X 的 $\mathfrak{U}$ 的有限子簇. ■

下面以几个表达紧度量空间有用性质的命题来结束本节. 我们首先观察到紧的概念与闭的概念密切相关，就如同以下命题所阐明的，紧即可看作是一种绝对形式的闭. 155

22. 命题 *紧空间的闭子集是紧的. 度量空间的紧子集是闭的且有界.*

证明 令 X 是紧的，F 为 X 的闭子集，且 $\mathfrak{U}$ 为 F 的开覆盖，那么 $\mathfrak{U}\cup\{\widetilde{F}\}$ 是 X 的开覆盖，因而一定有一个有限子覆盖 $\{\widetilde{F}, O_1, \cdots, O_N\}$，那么集合 $O_1, O_2, \cdots, O_N$ 覆盖 F，并且 $\mathfrak{U}$ 有一个有限子覆盖.

假定 K 是度量空间 X 的紧子集，且令 y 为 K 的闭包点，那么 $f(x)=\rho(x, y)$ 是 K 上的一个连续函数且下确界为 0. 由于 f 在 K 上取到最小值，则存在 $z\in K$ 使得 $f(z)=\min f(x)=0$. 因此 $\rho(z, y)=0$，因而 $y=z\in K$. 所以 K 是闭的. 为证明 K 是有界的，经观察发现在 K 上 $\rho(x_0, x)$ 是 x 的连续函数，因而以某个数 M 为界，那么 $K\subset B_{x_0,M}$. ■

23. 系 *实数的每个紧集是闭的且有界.*

24. 命题 紧集的连续像是紧的.

证明 令 f 为一个将紧集 K 映上空间 Y 的连续函数. 若 $\mathcal{U}$ 是 Y 的开覆盖，则取遍所有 $O\in\mathcal{U}$ 的集簇 $f^{-1}[O]$ 是 K 的开覆盖. 根据 K 的紧性，$\mathcal{U}$ 中存在有限个集合 O_1，…，O_n 使得 $f^{-1}[O_i]$ 覆盖 K. 由于 f 是映上的，所以集合 O_1，…，O_n 覆盖 Y. ■

25. 命题 度量空间 X 是紧的当且仅当它既是完备的又是全有界的.

证明 若 X 是紧的，它自然全有界. 若 $\langle x_n\rangle$ 是 X 的柯西序列，则 $\langle x_n\rangle$ 必须有一个聚点. 而有聚点的柯西序列一定收敛到该聚点，因此 X 是完备的.

假定 X 完备且全有界. 为证明 X 是紧的，仅需证明每个无限序列 $\langle x_n\rangle$ 有一收敛的子序列. 由于 X 是全有界的，我们可以用有限个半径为 1 的球来覆盖 X，其中必须有一个球 S_1 包含 $\langle x_n\rangle$ 的无穷多项. 再用有限个半径为 $\frac{1}{2}$ 的球覆盖 X，我们能够找到一个球 S_2 使得 $S_1\cap S_2$ 包含 $\langle x_n\rangle$ 的无穷多项. 依此下去，就可得到一个球的序列 $\langle S_k\rangle$，S_k 的半径为 $1/k$，使得 $S_1\cap\cdots\cap S_k$ 包含该序列的无穷多项. 由于该序列的无限多项属于 $S_1\cap\cdots\cap S_k$，则可以选取 n_k 使得 $n_k>n_{k-1}$ 且 $x_{n_k}\in S_1\cap\cdots\cap S_k$. 那么 $\langle x_{n_k}\rangle$ 就是序列 $\langle x_n\rangle$ 的一个子序列，而且由于对于 k，$l\geqslant N$，$\rho(x_{n_k},x_{n_l})\leqslant 2/N$，所以它还必须是一个柯西序列. 因为 X 是完备的，故而该子序列收敛. ■

[156]

26. 命题 令 f 为从紧度量空间 X 到度量空间 Y 的连续映射，那么 f 是一致连续的.

证明 给定 $\varepsilon>0$ 和 $x\in X$，存在 $\delta_x>0$ 使得 $\rho(x, y)<\delta_x$ 蕴涵 $\sigma(f(x), f(y))<\varepsilon/2$. 令 O_x 为球体 $\{y: \rho(x, y)<\frac{1}{2}\delta_x\}$，那么 $\{O_x: x\in X\}$ 是 X 的开覆盖，因而有一个有限子覆盖 $\{O_{x_1}, \cdots, O_{x_n}\}$. 令 $\delta=\frac{1}{2}\min\{\delta_{x_1}, \cdots, \delta_{x_n}\}$，那么 $\delta>0$. 给定属于 X 的两个点 y 和 z 使得 $\rho(y, z)<\delta$，点 y 必须属于某个 O_{x_i}，因此 $\rho(y, x_i)<\frac{1}{2}\delta_{x_i}$，$\rho(z, x_i)\leqslant\rho(z, y)+\rho(y, x_i)<\frac{1}{2}\delta_{x_i}+\delta\leqslant\delta_{x_i}$. 所以有 $\sigma(f(y), f(x_i))<\varepsilon/2$ 且 $\sigma(f(z), f(x_i))<\varepsilon/2$. 这表明 $\sigma(f(z), f(y))<\varepsilon$，证明了 f 在 X 上是一致连续的. ■

习题

27. 令 X 为度量空间，K 为一个紧子集，且 F 是一个闭子集，那么 $F\cap K=\varnothing$ 当且仅当 $\rho(F, K)>0$，即若存在 $\delta>0$ 使得 $\rho(x, y)>\delta$ 对于所有 $x\in F$ 和 $y\in K$ 成立. [考虑函数 $\rho(x,F)=\inf_{y\in F}\rho(x, y)$.]

28. a. 令 X 为全有界的度量空间，且 $f: X\to Y$ 为映上 Y 的一致连续映射，那么 Y 是全有界的.

    b. 若仅要求 f 连续该结果是否仍成立?

29. 证明命题 20. [提示:

    a. 仅需考虑当 $X\notin\mathcal{U}$ 的情形. 设 $\varphi(x)=\sup\{r: \exists O\in\mathcal{U}$ 满足 $B_{x,r}\subset O\}$，证明 $0<\varphi(x)<\infty$.

    b. 证明对于每个 x 和 y，

$$\varphi(y)\geqslant\varphi(x)-\rho(x,y).$$

c. 证明 φ 是 X 上的连续函数.

d. 若 X 是序列紧的，则 $\varepsilon=\inf\varphi$ 是正的.

e. 这个 ε 满足命题的结论.]

157

30. a. 令 $Z=\bigtimes_{k=1}^{\infty}X_k$（见习题 24）. 证明若每个 X_k 全有界，则 Z 全有界.

b. 证明若每个 X_k 是紧度量空间，则它们的直积也是紧度量空间.

7.8 贝尔范畴

本节我们进一步深入研究完备度量空间某些方面的性质，即贝尔范畴理论. 该理论的应用给出了在分析中非常有用的最深刻的拓扑性质. 下面从贝尔经典定理开始对这一理论的探讨.

27. 定理(贝尔)　*令 X 为完备度量空间且 $\{O_k\}$ 是 X 的可数稠密开子集簇，那么 $\bigcap O_n$ 是稠密的.*

证明　给定一个开集 U，令 x_1 为 $O_1\cap U$ 的点，令 S_1 为中心在 x_1(半径 r_1)且包含于 $O_1\cap U$ 的球. 由于 O_2 稠密，必存在一点 x_2 属于 $O_2\cap S_1$. 由于 O_2 开，必有一小球 S_2 中心在 x_2 且包含于 O_2. 我们可以取 S_2 的半径 r_2 比 $\frac{1}{2}r_1$ 小，也比 $r_1-\rho(x_1, x_2)$ 小. 那么 $\bar{S}_2\subset S_1$. 如此递推地进行下去，可得到一个球的序列 $\langle S_n\rangle$ 使得 $\bar{S}_n\subset S_{n-1}$ 且 $S_n\subset O_n$，其半径 $\langle r_n\rangle$ 趋于零. 令 $\langle x_n\rangle$ 为这些球的中心组成的序列，那么对 $n, m\geqslant N$ 有 $x_n\in S_N$ 与 $x_m\in S_N$. 因此 $\rho(x_n, x_m)\leqslant 2r_N$，且由于 $r_n\to 0$，$\langle x_n\rangle$ 是一个柯西序列. 根据 X 的完备性，存在点 x 使得 $x_n\to x$. 由于当 $n>N$，$x_n\in S_{N+1}$，所以有 $x\in\bar{S}_{N+1}\subset S_N\subset O_N$. 因此 $x\in\bigcap O_n$，且 $x\in U$. 而 U 是任意一个开集，故 $\bigcap O_n$ 在 X 稠密. ■

下面引入一些术语. 若一个集合 E 满足 $\sim(\bar{E})$ 是稠密的，则称 E 是无处稠密的. 这等价于说 $\bar{E}$ 不包含非空开集. 对于一个集合 E，若 E 是可数无处稠密集簇的并就称它为**第一范畴的**(或贫瘠的). 不是第一范畴的集合称为**第二范畴的**(或非贫瘠的)，且第一范畴集的补集称为**剩余的**(或协贫瘠的).

158

有了这些术语，贝尔定理可重新表述为：

28. 系(贝尔范畴定理)　*令 X 为完备度量空间，那么 X 没有第一范畴(即可数无处稠密子集簇的并集)的非空开子集.*

证明　令 E_n 为可数无处稠密子集簇，并且 U 是非空开集，那么 $O_n=\sim\bar{E}_n$ 是 X 的稠密开子集，则根据贝尔定理存在点 $x\in U$，而这个 x 还属于 $\bigcap O_n$. 这就意味着 $x\notin\bigcup E_n$，因而 U 不包含于 $\bigcup E_n$. ■

贝尔定理及其系的不同寻常之处在于假设是关于一致性质(X 的完备性)的，而结论却纯粹是拓扑性质的，若 X 和 Y 是同胚的且 X 没有第一范畴的非空开子集，则 Y 的任何非空开子集也非第一范畴集. 具有这一性质的度量空间(或拓扑空间)称为*处处第二范畴*(关于它们自身). 对于这些空间我们有本节所有命题的结论以及习题中所探讨的许多性质. 除完备度量空间外，还将看到局部紧的豪斯多夫空间也是处处第二范畴. 然而对于这些空间，许多范畴理论的结果可直接从局部紧性得到.

拓扑空间的第一范畴集的性质与完备测度空间的零测度集的性质有一些相似之处：这两类集取可数并的运算都封闭，这两类之一的任意子集也属于该类．任何满足这两个性质的集簇称为集合的σ理想．第一范畴集可被认为是“小”集．若X是完备度量空间，则第一范畴集无内点．

另一方面，[0，1]的第一范畴集可能有勒贝格测度1，且因此其补集是测度为零的剩余集．

以下命题表述了一些有用的特征和性质．记住它们在证明与范畴理论有关的命题时会有帮助．

159

29. 命题 若O开且F闭，则集合$\bar{O}\sim O$和$F\sim F^\circ$无处稠密．若F是闭的且在完备度量空间是第一范畴集，则F无处稠密．

30. 命题 完备度量空间的子集是剩余的当且仅当它包含一个稠密的G_δ．因此一个完备度量空间的子集是第一范畴的当且仅当它包含于一个F_σ，其补集是稠密的．

这后一个命题的有用之处在于，若预先知道集合E是一个G_δ，则要证明E是剩余的仅需证明E是稠密的．

31. 命题 令$\{F_n\}$为可数闭集簇满足$X=\bigcup F_n$，那么$O=\bigcup F^\circ_n$是一个剩余开集．若X是完备度量空间，则O是稠密的．

证明 集合$E_n=F_n\sim F^\circ_n$无处稠密，那么$E=\bigcup E_n$是第一范畴集．但$X\sim O\subset E$，因此O是剩余的．而第二个陈述可直接从命题30得到．■

范畴理论在分析中的一些应用好得几乎令人难以置信．以下定理就是一个非常好的应用，它即是我们所知道的一致有界性原理．在10.4节与习题10.44e中给出了范畴理论的其他应用．

32. 命题 令$\mathcal{F}$为完备度量空间X上的实值连续函数族，且假定对于每个$x\in X$存在一个数M_x使得对于所有$f\in\mathcal{F}$，$|f(x)|\leqslant M_x$成立．那么存在一个非空开集$O\subset X$和常数M使得对于所有$f\in\mathcal{F}$和所有$x\in O$，$|f(x)|\leqslant M$成立．

证明 对于每个整数m，令$E_{m,f}=\{x:|f(x)|\leqslant m\}$，且设$E_m=\bigcap_{\mathcal{F}}E_{m,f}$．由于每个$f$是连续的，所以$E_{m,f}$是闭的，因此$E_m$是闭的．对于每个$x\in X$，存在一个$m$使得对于所有$f\in\mathcal{F}$，$|f(x)|\leqslant m$；即存在一个$m$使得$x\in E_m$．因此

$$X=\bigcup_{m=1}^{\infty}E_m.$$

由于X是完备度量空间，存在一个不是无处稠密的集合E_m．而这个E_m是一个闭集，它必须包含某个球O．但对每个$x\in O$有$|f(x)|\leqslant m$对于所有$f\in\mathcal{F}$都成立．■

160

习题

31. a. 证明一个闭集F无处稠密当且仅当它不包含开集．

    b. 证明E无处稠密当且仅当对任意非空开集O存在一个球包含于$O\sim E$．

32. a. 证明若E是第一范畴且$A\subset E$，则A也是第一范畴．

    b. 证明若$\langle E_n\rangle$是第一范畴集序列，则$\bigcup E_n$也是第一范畴．

33. a. 在[0，1]上存在一个无处稠密的闭集其勒贝格测度为 $1-1/n$.

    b. 构造[0，1]上的一个第一范畴集，其勒贝格测度为 1.

34. 证明命题 29.

35. 证明命题 30.

36. a. 度量空间的点 x 称为孤立的若集合$\{x\}$是开的. 证明没有孤立点的完备度量空间具有不可数个点.

    b. 证明[0，1]不可数. 将该证明与系 3.4 的证明相比较.

37. 令 E 是完备度量空间的一个子集.

    a. 若 $\widetilde{E}$ 稠密且 F 是包含于 E 的闭集，则 F 无处稠密.

    b. 若 E 和 $\widetilde{E}$ 都是稠密的，则它们中至多有一个是 F_σ.

    c. [0，1]的有理数集不是一个 G_δ集.

    d. [0，1]上是否存在一个实值函数，其在有理点连续而在无理点不连续?

38. 令 C 为 [0，1]上的连续函数空间，设 $F_n=\{f;\ (\exists x_0)$满足 $0\leqslant x_0\leqslant 1-1/n$，且对于所有满足 $x_0\leqslant x<1$ 的 x，$|f(x)-f(x_0)|\leqslant n(x-x_0)\}$.

    a. 证明 F_n是 C 的一个闭子集.

    b. 证明 F_n无处稠密. [提示：任何 $g\in C$ 可被折线函数 φ 在误差不超过 $\varepsilon/2$ 的范围内逼近，且 φ 可被折线函数 ψ 在误差不超过 $\varepsilon/2$ 的范围内逼近，ψ 右导数的绝对值处处大于 n.]

    c. 证明至少在[0，1]的一点上有有限右导数的连续函数集 D 是 C 的第一范畴集.

    d. [0，1]上存在无处可微的连续函数.

161

39. 证明在定理 32 的假设下存在一个稠密开集 $O\subset X$，使得每个 $x\in O$ 有邻域 U 致使 $\mathcal{F}$ 在其上一致有界.

40. 令 X 和 Y 为度量空间，卡拉泰奥多里引入一个称为连续收敛的概念：对于一个从 X 到 Y 的序列$\langle f_n\rangle$ 和一个从 X 到 Y 的映射 f，若对每个满足 $x=\lim x_n$的序列$\langle x_n\rangle$. 有 $f(x)=\lim f_n(x_n)$，那么说$\langle f_n\rangle$在 x 连续收敛于 f. 若 f_n在每个 $x\in X$ 连续收敛于 f，则称 f_n连续收敛于 f.

    a. 证明$\langle f_n\rangle$在 x 连续收敛于 f 当且仅当，给定 $\varepsilon>0$ 存在整数 N 和 x 的一个邻域 U，使得对于所有 $n\geqslant N$ 和所有 $x'\in U$，$\sigma(f_n(x'),\ f(x))<\varepsilon$. ["当"部分是直接的；"仅当"部分可用逆否方法来证明.]

    b. 令 $Z=\{1/n\}\cup\{0\}$作为[0，1]的子空间具有承袭自[0，1]的度量. 定义如下映射 g：$X\times Z\to Y$ 为

$$g\left(x,\frac{1}{n}\right)=f_n(x)$$

$$g(x,0)=f(x).$$

    证明在乘积度量下 g 在点$\langle x_0,\ 0\rangle$连续当且仅当$\langle f_n\rangle$在 x_0 连续收敛.

    c. 令$\langle f_n\rangle$在 x 连续收敛于 f，那么 f 在 x 连续.

    d. 从 X 到 Y 的连续映射序列$\langle f_n\rangle$在 x 连续收敛于 f 当且仅当，给定 $\varepsilon>0$ 存在一个整数 N 和一个 x 的邻域 U，使得对所有 $n\geqslant N$ 和所有 $x'\in U$，$\sigma(f_n(x'),\ f(x'))<\varepsilon$.

e. 从 X 到 Y 的连续映射序列 $\langle f_n \rangle$ 在 X 上连续收敛于 f 当且仅当在 X 的每一个紧子集上 $\langle f_n \rangle$ 一致收敛于 f.

f. 令 X 为完备度量空间且 $\langle f_n \rangle$ 为从 X 到度量空间 Y 的连续映射序列，使得对每个 $x \in X$，$f(x) = \lim f_n(x)$. 对于每对 m，$n \in \mathbf{N}$ 定义

$$F_{m,n} = \left\{ x \in X : \sigma(f_k(x), f_l(x)) \leqslant \frac{1}{m} \quad \text{对所有 } k, l \geqslant n \right\}.$$

162

那么 $F_{m,n}$ 是 X 的闭子集，$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_{m,n}$. 而且，$O_m = \bigcup_{n=1}^{\infty} F^{\circ}_{m,n}$ 是 X 的稠密开子集.

g. 令 O_m 为 (f) 中定义的集合，那么对于每个 $x \in O_m$，存在 x 的一个邻域 U 和一个 n，使得对于所有 k，$l \geqslant n$ 和所有 $x' \in U$

$$\sigma(f_k(x'), f_l(x')) \leqslant \frac{1}{m}$$

因此对于所有 $k \geqslant n$ 和所有 $x' \in U$ 也有

$$\sigma(f_k(x'), f(x')) \leqslant \frac{1}{m}$$

h. 令 $E = \bigcap O_m$，那么 E 是一个稠密 G_δ. 若 $x \in E$，则给定 $\varepsilon > 0$ 存在 x 的一个邻域 U 和一个 n，使得对于所有 $k \geqslant n$ 和所有 $x' \in U$，$\sigma(f_k(x'), f(x')) < \varepsilon$.

i. 令 X 为完备度量空间且 $\langle f_n \rangle$ 为从 X 到度量空间 Y 的连续映射序列. 假定 $\langle f_n \rangle$ 逐点地收敛于映射 f，即对于每个 $x \in X$，$f(x) = \lim f_n(x)$，那么 X 内存在一个稠密的 G_δ，在其上 $\langle f_n \rangle$ 连续地收敛于 f.

41. 令 (X, ρ) 和 (Y, σ) 为完备度量空间且 $f: X \times Y \to Z$ 为到度量空间 (Z, τ) 的连续映射，它分别在每个变量连续，即使得

$$f(\cdot, y): X \to Z$$

在每个 $y \in Y$ 连续，且

$$f(x, \cdot): Y \to Z$$

在每个 $x \in Y$ 连续.

a. 固定 $y_0 \in Y$. 设

$$F_{m,n} = \left\{ x \in X : \tau[f(x, y), f(x, y_0)] \leqslant \frac{1}{m} \text{ 对所有满足 } \sigma(y, y_0) \leqslant \frac{1}{m} \text{ 的 } y \right\}.$$

那么每个 $F_{m,n}$ 是闭的，且

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_{m,n}.$$

b. 令 $O_m = \bigcup_{n=1}^{\infty} F^{\circ}_{m,n}$，那么 O_m 是 X 的稠密子集，且给定 $x \in O_m$，则 $\langle x, y_0 \rangle$ 在 $X \times Y$ 上存在一个邻域 U 使得

$$\tau[f(p), f(x, y_0)] \leqslant \frac{1}{m}$$

对于所有 $p \in U$ 成立.

c. 令 $G=\bigcap O_m$，那么 G 在 X 是一个稠密的 G_δ，且对于每个 $x\in G$，f 在 $\langle x, y_0\rangle$ 连续. [163]

d. 存在一个集合 $E\in X\times Y$ 是稠密的 G_δ，它使得 f 在每个 $p\in E$ 连续.

e. 推广到有限个空间的乘积 $X_1\times X_2\times\cdots\times X_p$.

42. a. 令 X 和 Y 为完备度量空间，且令 $G\subset X$ 与 $H\subset Y$ 为稠密的 G_δ，那么 $G\times H$ 在 $X\times Y$ 中是稠密的 G_δ.

b. 令 O 为 $X\times Y$ 中的稠密开集，那么存在一个 $G\subset X$ 是稠密的 G_δ，使得对于每个 $x\in G$

$$E_x=\{y\in Y:\langle x,y\rangle\in O\}$$

是 Y 的稠密开子集.

c. 令 E 为 $X\times Y$ 中的稠密的 G_δ，那么存在一个 $G\subset X$ 是稠密的 G_δ，使得对于每个 $x\in G$

$$E_x=\{y\in Y:\langle x,y\rangle\in O\}$$

是稠密的 G_δ.

d. 证明不能总取集合 G 为开的.

43. 令 $\langle X, \rho\rangle$ 为完备度量空间且 $f: X\to\mathbf{R}$ 为上半连续函数，那么使得 f 在其上连续的点集 E 是 X 中稠密的 G_δ.

*7.9 绝对 G_δ

上一节描述了完备度量空间 G_δ 集的重要性，其中很容易证明它们关于自身处处是第二范畴的(或关于它们的闭包). 本节的目的是给出有关同胚于完备度量空间 G_δ 的那些空间的刻画：存在一个给出该空间拓扑的度量，对于该度量空间是完备的，它们具有在任何度量空间的同胚像是 G_δ 的性质. 为以后使用方便，下面就用拓扑空间的语言给出这些命题的结论. 此处对于度量空间所给出的证明可直接推广到更一般的情形(参见习题 8.31).

我们从关于完备度量空间 G_δ 的命题开始.

33. 命题 令 $\langle X, \rho\rangle$ 为完备度量空间且 $E\subset X$ 是一个 G_δ，那么存在一个 E 的度量 σ，它等价于 E 上的度量 ρ，且使得 (E, σ) 是完备度量空间. [164]

证明 令 $E=\bigcap_{n=1}^{\infty} O_n$，其中 O_n 为开. 令 σ_n 为 O_n 的度量其界为 1，并在 O_n 上等价于 ρ，使得 (O_n, ρ_n) 是完备的(参见习题 26). 设

$$\sigma=\sum 2^{-n}\sigma_n.$$

那么 σ 是 E 上等价于 ρ 的度量.

令 $\langle x_k\rangle$ 为 σ 的柯西序列. 那么由于 $2^n\sigma\geqslant\sigma_n$，对于 σ_n，$\langle x_k\rangle$ 必须为柯西序列. 因此在 (O_n, σ_n) 内 $\langle x_k\rangle$ 收敛于点 $y_n\in O_n$. 由于 σ_n 和 ρ 在 O_n 上等价，在 (X, ρ) 内 $x_k\to y_n$. 因为在度量空间内序列的极限惟一，所以对于所有的 m，n，有 $y_n=y_m$，并称这个共同值为 y，那么在 X 内，$x_n\to y$. 由于 $y=y_n\in O_n$，$y\in E=\bigcap O_n$. ρ 和 σ 的等价性表明 $\langle x_k\rangle$ 在 (E, σ) 内收敛于 y，因而 (E, σ) 是完备的. ■

34. 命题 令 E 为拓扑空间 X 的子集，且 $f: E\to Y$ 是一个到完备度量空间 (Y, σ) 的连续映射，那么 f 可以延拓成一个定义在包含 E 的 G_δ 集合 E^* 上的连续函数 $f^*: E^*\to Y$.

证明　令 $O_n=\{x\in X$：$\exists$ 一个 x 的邻域 U 使得 $U\cap E\neq\varnothing$ 且 $f[U\cap E]$ 的直径小于 $1/n\}$，那么 O_n 是开的且 $E\subset O_n$. 令 $E^*=\bigcap O_n$. 那么 E^* 是一个 G_δ 且 $E\subset E^*$.

令 $x\in E^*$，那么对于每个 n 存在 x 的邻域 U，满足 $U\cap E\neq\varnothing$ 且 diam $f[E\cap U]$ 小于 $1/n$. 选取 $x_n\in U$，那么序列 $\langle x_k\rangle$ 具有对于 k，$l\geqslant n$ 有 $\sigma(f(x_k)$，$f(x_l))\leqslant 1/n$ 这一性质. 因此 $\langle f(x_k)\rangle$ 是柯西序列因而收敛到点 $y\in Y$. 定义 $f^*(x)$ 为 y，易见 $f^*(x)$ 的值与序列 $\langle x_k\rangle$ 的选取无关. 因此对 $x\in E$，$f^*(x)=f(x)$，且 f^* 是连续的. ■

35. 命题　*令 E 为豪斯多夫拓扑空间的稠密子集，且假定 E 同胚于完备度量空间 (Y, σ). 那么 E 是一个 G_δ.*

证明　令 f：$E\to Y$ 为同胚映射且令 $g=f^{-1}$，令 f^* 为命题 34 所给出的 f 到 E^* 的延拓. 那么 $g\circ f$：$E\to X$ 是一个 E 上的恒同映射和 id_E. 由于 E 在 X 稠密，$E^*\subset\bar{E}$，因而 $g\circ f^*$ 和 id_{E^*} 为从 E^* 到 X 的连续映射，且在 E^* 的稠密子集 E 上一致. 因此 $g\circ f^*=\mathrm{id}_{E^*}$（对于 X 为度量空间参见习题 44，而 X 为豪斯多夫空间参见习题 8.30).

165

因此

$$\begin{aligned} f\circ(\mathrm{id}_{E^*}) &= f\circ(g\circ f^*) = (f\circ g)\circ f^* \\ &= \mathrm{id}_Y\circ f^* = f^*. \end{aligned}$$

所以 $E^*=f^*$ 的值域 $\subset f$ 的值域 $=E$，因而 $E^*=E$. ■

以下的系是命题 33 的逆命题.

36. 系　*令 E 为度量空间 X 的子集，且假定 E 同胚于完备度量空间 Y，那么 E 是一个 G_δ.*

证明　根据命题 35，集合 E 是一个相对于度量空间 $\bar{E}$ 的 G_δ，但 $\bar{E}$ 是度量空间的闭子集，因此它在 X 内是一个 G_δ. 令 $E=\bigcap U_n$ 为 X 内开集，且 $E=\bigcap(O_n\cap\bar{E})$ 满足 $O_n\cap\bar{E}$ 在 $\bar{E}$ 内为开集，那么 $E=\bigcap(O_n\cap U_n)$，因而 E 是一个 G_δ. ■

习题

44. 证明在命题 33 的证明中所给出定义的函数 σ 是一个度量且等价于 ρ. 这个等价是一致等价的吗？
45. 令 $A\subset B\subset\bar{A}$ 为度量空间的子集，且令 g 和 h 为 B 到度量空间 X 的连续映射. 若对于所有 $u\in A$，$g(u)=h(u)$，则 $g\equiv h$.
46. 本题的目的是，证明每个子集 $E\subset(0, 1)$ 若它是一个稠密的 G_δ，且它的补集也在 $[0, 1]$ 稠密，则它同胚于 $[0, 1]$ 的无理数集，且同胚于可数个自然数集的乘积空间 $\mathbf{N}^\omega$.
    a. 令 I 为开区间，E_I 是一个 G_δ 稠密于 I，其补集也稠密于 I. 令 σ 为定义在 E_I 且使得 E_I 完备的等价度量，那么给定 $\varepsilon>0$ 存在可数无限个 I 的两两不交的子区间 I_1，$\cdots I_k$，$\cdots$，其并集包含 E_I，使得 $E_I\cap I_k$ 在度量 σ 下的直径小于 ε.
    b. 从 E 开始，找出 $\varepsilon=\dfrac{1}{2}$ 时满足(a)条件的不相交的开区间 I_1，$\cdots I_j$，$\cdots$. 对于 $E_{I_j}=E\cap I_j$ 和 $\varepsilon=\dfrac{1}{4}$ 重复这个过程，得到区间 $I_{j,1}$，$\cdots$，$I_{j,k}$，$\cdots$. 继续下去，在第 n 步，$\varepsilon=2^{-n}$ 时得到区间 $I_{j,k,\cdots,l}$. 证明对于每个 $x\in E$ 存在惟一的整数序列 k_1，$\cdots k_j$，$\cdots$ 使得对于每个

n 有

$$x \in I_{k_1,\cdots,k_n}.$$

166

c. 证明对于每个整数序列 k_1，k_2，…，k_j，…存在惟一的 $x\in E$，使得对任何 n 有

$$x \in I_{k_1,\cdots,k_n}.$$

d. 令 $\mathbf{N}^\omega$ 为整数的无限序列空间，且令 $\mathbf{N}$ 为具有度量 $\rho(i, j)=\delta_{ij}$ 的空间. 令 τ 为 $\mathbf{N}^\omega$ 的乘积度量(习题 24)，那么 $\mathbf{N}^\omega$ 与 E 之间的由(b)和(c)所给出的对应 h 是 $(\mathbf{N}^\omega, \tau)$与$(E, \sigma)$间的一致同胚映射.

e. 证明(0，1)的任何稠密 G_δ(其补集也稠密)同胚于(0，1)的无理数集.

7.10 阿斯科利-阿尔泽拉定理

在分析中通常知道在何种条件下一个函数列有在某种意义下收敛的子序列是有用的. 以下概念在这个问题上起着中心作用：从度量空间 X 到度量空间$\langle Y, \sigma\rangle$的函数族$\mathcal{F}$称为在点 $x\in X$ **等度连续**的，若给定 $\varepsilon>0$ 存在一个包含 x 的开集O，使得 $\sigma[f(x), f(y)]<\varepsilon$ 对于所有属于O的 y 和所有 $f\in\mathcal{F}$成立. 若集族在 X 的每一点 x 等度连续则说它在 X 上等度连续. 我们将证明若$\langle f_n\rangle$是一个取自等度连续函数族$\mathcal{F}$的序列，且若在 X 的每一点 x，$\langle f_n(x)\rangle$存在一个收敛的子序列，则$\langle f_n\rangle$有一个在 X 的每个紧子集上一致收敛的子序列. 下面从几个引理开始.

37. 引理　*令$\langle f_n\rangle$为可数集 D 到度量空间 Y 的映射序列，使得对于每个 $x\in D$ 集合$\{f_n(x): 0\leqslant n<\infty\}$的闭包是紧的，那么存在一个子序列$\langle f_{n_k}\rangle$在 D 中的每个 x 收敛.*

证明　令 $D=\{x_k\}$. 根据$\{f_n(x_1): 0\leqslant n<\infty\}$的闭包的序列紧性，可以选取$\langle f_n\rangle$的子序列$\langle f_{1n}\rangle$使得$\langle f_{1n}(x_1)\rangle$收敛. 再选出$\langle f_{1n}\rangle$的子序列$\langle f_{2n}\rangle$使得$\langle f_{2n}(x_2)\rangle$收敛. 依此继续下去，就得到一个在 x_j收敛的子序列$\langle f_{jn}\rangle$. 考虑"对角"序列$\langle f_{nn}\rangle$，则有$\langle f_{nn}\rangle_{n=j}^{\infty}$是$\langle f_{jn}\rangle$的一个子序列. 因而$\langle f_{nn}(x_j)\rangle$收敛. ■

167

38. 引理　*令$\langle f_n\rangle$为从度量空间 X 到完备度量空间 Y 的等度连续映射序列. 若序列$\langle f_n(x)\rangle$在 X 的稠密子集 D 的每一点 x 收敛，那么$\langle f_n\rangle$在 X 的每一点收敛，且其极限函数是连续的.*

证明　给定 x 属于 X 和$\varepsilon>0$，可找到一个包含 x 的开集 O，使得 $\sigma[f_n(x), f_n(y)]<\varepsilon/3$ 对于所有 y 属于 O 成立. 由于 D 是稠密的，必有一点 $y\in D\cap O$，且由于$\langle f_n(y)\rangle$收敛，它必须是一个柯西序列，因此选取足够大的 N 使得

$$\sigma[f_n(y), f_m(y)] < \varepsilon/3$$

对于所有 m，$n\geqslant N$ 成立，那么

$$\begin{aligned}\sigma[f_n(x), f_m(x)] &\leqslant \sigma[f_n(x), f_n(y)] + \sigma[f_n(y), f_m(y)] + \sigma[f_m(x), f_m(y)] \\ &< \varepsilon\end{aligned}$$

对于所有 m，$n\geqslant N$ 成立. 因此$\langle f_n(x)\rangle$是一个柯西序列，且根据 Y 的完备性它还收敛.

令 $f(x)=\lim f_n(x)$. 为证明 f 在x 连续，给定$\varepsilon>0$. 根据等度连续性，存在一个包含 x 的开集O 使得 $\sigma[f_n(x), f_n(y)]<\varepsilon$ 对于所有n 和 y 属于O 成立. 因此对于所有属于 O 的 y 有

$$\sigma[f(x), f(y)] = \lim \sigma[f_n(x), f_n(y)] \leqslant \varepsilon,$$

所以 f 在x 连续. ■

39. 引理　令 K 为紧度量空间，且令 $\langle f_n \rangle$ 为到度量空间 Y 的等度连续函数序列，其在 K 的每一点都收敛于函数 f，那么在 K 上 $\langle f_n \rangle$ 一致收敛于 f.

证明　选取 $\varepsilon>0$. 根据等度连续性，K 中的每个 x 都包含于开集 O_x，使得对于所有属于 O_x 的 y 与所有 n，$\sigma[f_n(x), f_n(y)]<\varepsilon/3$. 因此可知对所有 y 属于 O_x 也有 $\sigma[f(x), f(y)]\leqslant\varepsilon/3$.

根据 K 的紧性，这些集合中存在一个有限簇 $\{O_{x_1}, \cdots, O_{x_k}\}$ 覆盖 K. 选取足够大的 N 使得对于所有 $n\geqslant N$，有 $\sigma[f_n(x_i), f(x_i)]<\varepsilon/3$ 对每个对应于这个有限簇的 x_i 成立. 因此，对任何属于 K 的 y 存在一个 $i\leqslant k$ 使得 $y\in O_{x_i}$，那么对于 $n\geqslant N$ 有

$$\begin{aligned}\sigma[f_n(y),f(y)] &\leqslant \sigma[f_n(y),f_n(x_i)]+\sigma[f_n(x_i),f(x_i)]+\sigma[f(y),f(x_i)]\\ &<\varepsilon\end{aligned}$$

168
所以 $\langle f_n \rangle$ 在 K 上一致收敛于 f. ■

这三个引理加上度量空间的紧子集是完备的这一事实，蕴涵以下定理，该定理主要归功于阿斯科利或阿尔泽拉.

40. 定理（阿斯科利-阿尔泽拉）　令 $\mathcal{F}$ 为从可分空间 X 到度量空间 Y 的等度连续函数族，令 $\langle f_n \rangle$ 为 $\mathcal{F}$ 中的序列使得对于每个属于 X 的 x，集合 $\{f_n(x): 0\leqslant n<\infty\}$ 的闭包是紧的，那么存在一个子序列 $\langle f_{n_k} \rangle$，其点态收敛于连续函数 f，该收敛在 X 的每个紧集上是一致的.

41. 系　令 $\mathcal{F}$ 为可分空间 X 上的实值等度连续函数族，那么 $\mathcal{F}$ 中在（稠密子集的）每一点都有界的序列 $\langle f_n \rangle$ 有一个子序列 $\langle f_{n_k} \rangle$，其逐点收敛于连续函数，该收敛在 X 的每个紧子集上是一致的.

习题

47. 令 X 为度量空间，令 $\langle f_n \rangle$ 为从 X 到度量空间 Y 的连续函数序列，且在 X 的每个紧集 K 上一致收敛于函数 f，那么 f 是连续的.
48. 令 X 为可分局部紧的度量空间，且 $\langle Y, \sigma \rangle$ 是任意度量空间. 证明：
    a. 存在 X 的可数开子集簇 $\{O_n\}$ 使得 $\overline{O_n}$ 紧且 $X=\bigcup O_n$.
    b. 对于从 X 到 Y 的函数集合，若定义
    $$\sigma^*(f,g)=\sum 2^{-n}\sigma_n^*(f,g),$$
    其中
    $$\sigma_n^*(f,g)=\sup_{\bar{O}_n}\frac{\sigma[f(x),g(x)]}{1+\sigma[f(x),g(x)]}.$$
    则它成为一个度量空间.
49. 令 $\mathcal{F}$ 为从 X 到 Y 的等度连续函数族，且令 $\mathcal{F}^+$ 为 $\mathcal{F}$ 中函数的逐点极限所组成的族，即对于 f 存在 $\mathcal{F}$ 中的序列 $\langle f_n \rangle$ 使得对于每个 $x\in X$，$f(x)=\lim f_n(x)$. 证明 $\mathcal{F}^+$ 也是等度连续的函数族.
169
50. 对于 $[0, 1]$ 上的实值函数 f，若存在一个常数 C 使得 $|f(x)-f(y)|\leqslant C|x-y|^\alpha$，则称它为 α 阶赫尔德连续. 定义
    $$\|f\|_\alpha=\max|f(x)|+\sup|f(x)-f(y)|/|x-y|^\alpha.$$

证明对于 $0<\alpha\leqslant 1$，满足 $\|f\|_\alpha\leqslant 1$ 的函数集是 $C[0, 1]$上的一个紧子集.

51. 令$\mathcal{F}$为在单位圆盘 $\Delta=\{z:|z|<1\}$全纯且满足 $|f(z)|\leqslant 1$ 的函数族.
    a. 证明$\mathcal{F}$等度连续. [用柯西公式估计 $|f(z)-f(z')|$.]
    b. 证明$\mathcal{F}$中的任何序列$\langle f_n\rangle$有一个在 Δ 的每个紧子集上一致收敛于 Δ 上全纯函数 f 的子序列$\langle f_{n_j}\rangle$.
    c. 证明**奥斯古德定理**：令 f_n为 Δ 上的全纯函数序列，使得对于每个 $z\in\Delta$，$f_n(z)\to f(z)$. 那么存在一个稠密开集 $O\subset\Delta$，使得 f 在其上是全纯的. [运用一致有界原理.]

170

第8章 拓扑空间

8.1 基本概念

在第7章中我们讨论了度量空间的性质且发现一些定理仅依赖于开集与闭集的性质. 本章要研究这么一种空间，在其上开集的概念是最基本的而其余概念则由它来定义. 这样的空间比度量空间更为一般，我们称它为拓扑空间. 也许有人会问：为什么不集中在度量空间呢？固然度量空间比较简单，但有许多函数空间的例子，它们的拓扑与由放入该空间的任何度量所导出的拓扑不一致. 重要的例子包括巴拿赫空间的弱拓扑. 下面我们给出正式定义.

定义 一个拓扑空间$\langle X, \mathscr{T}\rangle$是一个非空点集$X$与一个子集族$\mathscr{T}$(称它为开集)，它满足以下性质：

i. $X\in\mathscr{T}$，$\varnothing\in\mathscr{T}$.

ii. $O_1\in\mathscr{T}$和$O_2\in\mathscr{T}$蕴涵$O_1\cap O_2\in\mathscr{T}$.

iii. $O_\alpha\in\mathscr{T}$蕴涵$\bigcup_\alpha O_\alpha\in\mathscr{T}$.

171

族$\mathscr{T}$称为集合X的一个拓扑.

度量空间$\langle X, \rho\rangle$的开集满足该定义要求的所有性质，因此对于每个度量空间$\langle X, \rho\rangle$，可以找到一个拓扑空间$\langle X, \mathscr{T}\rangle$与之相对应，这里$\mathscr{T}$是$\langle X, \rho\rangle$的开集族. 用这种方式与某个度量空间相伴随的拓扑空间称为*可度量化的*，且度量ρ称为该拓扑空间的度量. 从逻辑的观点来看，由于不同的度量空间可能得到相同的拓扑空间，因此将度量空间与它相伴随的拓扑空间加以区别是必要的. 但这样的两个空间自然是等价的，在不造成误解的情况下，通常不考虑度量空间与它相伴随的拓扑空间之间的区别. 有时，甚至不区别拓扑空间$\langle X, \mathscr{T}\rangle$与它的点集$X$，都用$X$来表示它们. 然而，必须牢记度量空间和拓扑空间总是相伴随的，在许多情形下还必须明确表达这个事实.

给定任意点集X，总可以在X上定义两个拓扑. 一个是平凡拓扑，它仅有的两个开集是$\varnothing$和X. 第二个可能的拓扑是离散拓扑：X的每个子集是开集.

根据开集的概念我们可以定义其他的拓扑性质，例如，对于X的子集F，若$\widetilde{F}$是开的，则称F为**闭的**.

1. 命题 集合$\varnothing$与X是闭的. 任何两个闭集的并是闭的. 任意闭集簇的交是闭的.

对任意一个集合E，包含E的所有闭集的交仍然是闭集. 我们称它为E的*闭包*，且将它记为$\bar{E}$. 它是包含E的最小闭集. 点$x\in X$称为E的*闭包点*，若每个包含x的开集O与E相交，即与E有非空交集.

所有包含于E的开集的并仍然是开集. 我们称它为E的*内部*，且把它记为E°. 点x称为E的*内点*，若存在一个开集满足$x\in O\subset E$. 以下命题列出了闭包与内部的一些性质，其证明留给读者.

172

2. 命题 $E\subset\bar{E}$，$\bar{\bar{E}}=\bar{E}$，$\overline{A\cup B}=\bar{A}\cup\bar{B}$，一个集合$F$是闭的当且仅当$F=\bar{F}$. $\bar{E}$是E的闭

包的点组成的集合．$E^{\circ}\subset E$，$E^{\circ\circ}=E^{\circ}$，$(A\cap B)^{\circ}=A^{\circ}\cap B^{\circ}$和 E° 是 E 的内点组成的集合．最后，$(\tilde{E})^{\circ}=\sim(\bar{E})$.

若 A 是拓扑空间$\langle X, \mathcal{J}\rangle$的一个子集，可定义关于 A 的拓扑$\mathcal{S}$如下：取 A 的那些具有如下表示的子集 B：存在一个集合 $O\in\mathcal{J}$使得 $B=A\cap O$，那么称$\mathcal{S}$为承袭自$\mathcal{J}$的拓扑且称拓扑空间$\langle A, \mathcal{S}\rangle$为$\langle X, \mathcal{J}\rangle$的一个子空间．这与我们关于度量空间的用法是一致的．

拓扑空间的序列$\langle x_n\rangle$称为收敛到点 x，或有极限 x，若给定任何包含 x 的开集O，存在一个整数 N 使得对所有 $n\geqslant N$，有 $x_n\in O$．类似地，一个序列$\langle x_n\rangle$称为有聚点 x，如果给定包含 x 的任何开集 O 和任何整数 N，存在整数 $n\geqslant N$ 使得 $x_n\in O$．因此若$\langle x_n\rangle$有一个子序列收敛到 x，那么 x 就是$\langle x_n\rangle$的一个聚点．而反命题对任意拓扑空间并不总成立．

按命题 7.7 的观点，我们可以定义拓扑空间上的连续函数，当此拓扑空间也为度量空间时，该定义与通常的连续函数的定义是一致的．

定义 对于从拓扑空间$\langle X, \mathcal{J}\rangle$到拓扑空间$\langle Y, \mathcal{S}\rangle$的映射 f，若每个开集的逆像是开的，即若 $O\in\mathcal{S}$，则 $f^{-1}[O]\in\mathcal{J}$，则称它为(连续的)．

应当注意到，若 f 是空间 X 上的连续函数，那么将 f 限制在 X 的子空间 A 所得到的函数 f_1是 A 上的连续函数，这是因为根据 f 的连续性和 A 中开集的定义，对开集 O 有 $f_1{}^{-1}[O]=A\cap f^{-1}[O]$．

对于一个从 X 到 Y 的映射 f，若给定 Y 中任意包含 $f(x_0)$的开集 O，存在 X 中一个包含 x_0的开集 U，使得 $f[U]\subset O$，则说它在点 $x_0\in X$ 连续．从 X 到 Y 的映射是连续的当且仅当它在 X 的每一点连续．

有时用将两个连续函数拼接的方法来构造连续函数．以下命题给出了如此做的条件．

3. 命题 令 A 为拓扑空间 X 的子集，它是两个闭集(或两个开集)A_1与 A_2的并．若 f 是一个从 A 到拓扑空间 Y 的映射，限制 $f|A_1$与 $f|A_2$都是连续的，那么 f 也是连续的． 173

定义 两个拓扑空间之间的同胚 f 是 X 映上 Y 的一个一一对应的连续映射，且 f^{-1}是连续的．对于空间 X 和 Y，若它们之间存在一个同胚，那么称它们为同胚的．

从抽象的观点来看，两个同胚的拓扑空间是无法区分的．一个同胚只不过就是用一个集合中的点来重新标记另一个集合中的点．拓扑空间的同胚与度量空间的等距同构，以及代数系统的同构起着相同的作用．

假定$\mathcal{J}$和$\mathcal{S}$是同一集合 X 的两个拓扑．若$\mathcal{S}\supset\mathcal{J}$，那么说$\mathcal{S}$比$\mathcal{J}$强．在这种情形下，也说$\mathcal{J}$比$\mathcal{S}$弱．因此$\mathcal{S}$比$\mathcal{J}$强当且仅当$(X, \mathcal{S})$到$(X, \mathcal{J})$的恒同映射是连续的．集合 X 的平凡拓扑是 X 上的可能的最弱的拓扑，而离散拓扑是可能的最强的拓扑．有时术语较细和较粗分别被用以表示较强和较弱．

若$\mathcal{S}$和$\mathcal{J}$是同一集合 X 的两个拓扑，那么$\mathcal{S}\cap\mathcal{J}$也是拓扑．事实上，若$\{\mathcal{J}_\alpha\}$是任意拓扑簇，那么$\bigcap_\alpha \mathcal{J}_\alpha$是一个拓扑．因此若$\mathcal{C}$是 X 的任意子集簇，则所有包含$\mathcal{C}$的拓扑的交是一个包含$\mathcal{C}$的拓扑．这个拓扑是使得$\mathcal{C}$的所有集合是开集的最弱的拓扑．

4. 命题 令 X 为非空点集且$\mathcal{C}$是 X 的任意子集簇，那么存在一个包含$\mathcal{C}$的最弱拓扑$\mathcal{J}$．

习题

1. a. 给定集合 X，你能定义 X 上的一个度量使得与之相伴随的拓扑空间是离散的吗？或是平凡的？

   b. 令 X 是具有平凡拓扑的空间，找出所有 X 到 $\mathbf{R}$ 的连续映射.

   c. 令 X 为具有离散拓扑的空间，找出所有 X 到 $\mathbf{R}$ 的连续映射.

2. 证明命题 2.

174

3. 证明一个集合 $A\subset X$ 是开的，当且仅当给定 $x\in A$，存在一个开集 O 使得 $x\in O\subset A$.

4. 一个从 X 到 Y 映射是连续的当且仅当每个闭集的逆像是闭的.

5. 证明若 f 是从 X 到 Y 的连续映射，g 是从 Y 到 Z 的连续映射，那么 $g\circ f$ 是从 X 到 Z 的连续映射.

6. 证明两个实值连续函数的和与积是连续函数.

7. a. 令 F 为拓扑空间的闭子集，且 $\langle x_n\rangle$ 是 F 的一个点列. 证明，若 x 是 $\langle x_n\rangle$ 的聚点，则 $x\in F$.

   b. 证明若 f 连续且 $x=\lim x_n$，则 $\langle f(x_n)\rangle$ 有极限 $f(x)$.

   c. 证明若 f 连续且 x 是 $\langle x_n\rangle$ 的聚点，则 $f(x)$ 是 $\langle f(x_n)\rangle$ 的聚点.

8. 库拉托夫斯基 14 子集问题：

   a. 令 E 为拓扑空间 X 的任意集. 证明对 E 反复进行取补和闭包运算至多可得到 14 个不同的子集.（这包括 $E=\sim(\sim E)$.）

   b. 在 $\mathbf{R}^2$ 中给出一个由适当的 E 得到 14 个不同子集的例子.（在 $\mathbf{R}$ 内可以给出一个例子，但在 $\mathbf{R}^2$ 中却较容易画出来.）

9. 证明从拓扑空间 X 到拓扑空间 Y 的函数 f 是连续的，当且仅当它在 X 的每一点连续.

10. a. 证明命题 3.

    b. 证明若不要求 A_1 和 A_2 同时是开或同时是闭的，则该命题不成立.

    c. 但是证明，若 $(\overline{A_1\sim A_2})\cap(A_2\sim A_1)=\varnothing$ 和 $(\overline{A_2\sim A_1})\cap(A_1\sim A_2)=\varnothing$，则命题仍然成立.

8.2　基与可数性

对于拓扑空间 X 的开子集簇 $\mathcal{B}$，若对于每个属于 X 的开集 O 和每个 $x\in O$，存在一个集合 $B\in\mathcal{B}$ 使得 $x\in B\subset O$，我们称 $\mathcal{B}$ 为 X 的拓扑 $\mathcal{J}$ 的一个**基**. 对于一个包含点 x 的开集簇 $\mathcal{B}_x$，若对于每个包含 x 的开集 O，存在一个 $B\in\mathcal{B}_x$ 使得 $x\in B\subset O$，则称它为在 x 的基. 因此一个开集簇 $\mathcal{B}$ 是一个基，当且仅当它包含在每个点 $x\in X$ 的基. 若 X 是一个度量空间，则球构成一个基，且中心在 x 的球构成一个在 x 的基.

175

若 $\mathcal{B}$ 是拓扑 $\mathcal{J}$ 的基，那么 $O\in\mathcal{J}$ 当且仅当对每个 $x\in O$ 存在一个 $B\in\mathcal{B}$ 满足 $x\in B\subset O$. "仅当"部分可由基的定义得出，而对于每个属于 O 的 x 有 $x\in B\subset O$，那么 O 必须为 $\mathcal{B}$ 内那些满足 $B\subset O$ 的 B 的并，且 O 是开的，这是因为它是开集的并.

我们常常发现，通过指定开集的一个基 $\mathcal{B}$，再用前面定义开集的准则来说明集合 X 的拓扑

是很方便的. 以下命题给出集簇$\mathcal{B}$为某个拓扑基的条件：

5. 命题 *X的子集簇$\mathcal{B}$为X上的某个拓扑的基，当且仅当X内的每个x包含于某个B，且若$x\in B_1\cap B_2$，那么存在一个$B_3\in\mathcal{B}$，使得$x\in B_3\subset B_1\cap B_2$.*

证明 这些条件的必要性可由基的定义和事实上X和$B_1\cap B_2$必须为开集得到. 现在假定$\mathcal{B}$满足这些条件. 若设$\mathcal{J}=\{O:(x\in O)(\exists B\in\mathcal{B})(x\in B\subset O)\}$，那么$\varnothing\in\mathcal{J}$，且$\mathcal{J}$中集合之并仍然在$\mathcal{J}$中，$\mathcal{B}$上的第一个条件蕴涵着$X\in\mathcal{J}$. 为证明$\mathcal{J}$内两个集合$O_1$和$O_2$的交仍然在$\mathcal{J}$内，令$x\in O_1\cap O_2$. 那么存在$\mathcal{B}$内的集合$B_1$和$B_2$，使得$x\in B_1\subset O_1$且$x\in B_2\subset O_2$. 令$B_3$为$\mathcal{B}$的集合，满足$x\in B_3\subset B_1\cap B_2$. 那么$x\in B_3\subset O_1\cap O_2$，这就得到了$O_1\cap O_2$是开的. ■

x的邻域常常指的就是基$\mathcal{B}_x$在x的元素. 若无给定基，直接或间接地谈到在x的邻域，就意味着包含x的开集. 使用基的优点在于，许多拓扑性质能够仅由基的元素而非所有开集来确定. 习题11和12给出了这样的例子.

我们取基的元素为开集. 而一些作者，包括布尔巴基和凯利，仅要求x的邻域为使得x为其内点的集合N，而在x的基$\mathcal{B}_x$为在x的邻域簇，使得给定任何包含x的开集O，存在一个$N\in\mathcal{B}_x$满足$x\in N^\circ\subset O$.

有时候使用子基来定义拓扑更为方便. 一个开集簇$\mathcal{C}$称为一个拓扑$\mathcal{J}$的子基，若给定$x\in X$和$O\in\mathcal{J}$，存在集合C_1，…，$C_n\in\mathcal{C}$，使得$x\in C_1\cap\cdots\cap C_n\subset O$. 若$\mathcal{C}$是$\mathcal{J}$的子基，那么$\mathcal{C}$内集合的有限交组成的簇是$\mathcal{J}$的基. 若$\mathcal{C}$是$X$的任意子集簇，那么$\mathcal{C}$就是使得$\mathcal{C}$的每个集合都是开的$X$上的最弱拓扑的子基. [176]

若拓扑空间在每点都存在一个可数基，则称它为满足*第一可数性公理*. 每个度量空间都满足第一可数性公理，这是由于中心在x、半径为有理数的球的个数是可数的，且构成一个在x的基. 一个空间称为满足*第二可数性公理*，若存在该拓扑的可数基. 因此命题7.6说明，一个度量空间满足第二可数性公理当且仅当它是可分的.

习题

11. a. 令$\mathcal{B}$为拓扑空间$\langle X,\mathcal{J}\rangle$的基，那么$x\in\bar{E}$，当且仅当对每个满足$x\in B$的$B\in\mathcal{B}$，存在一个$y\in B\cap E$.
    b. 令X满足第一可数性公理，那么$x\in\bar{E}$，当且仅当E中存在一个收敛到x的序列.
    c. 令X满足第一可数性公理，那么x是X中序列$\langle x_n\rangle$的聚点，当且仅当$\langle x_n\rangle$有一个收敛到x的子序列.
12. a. 证明，f连续当且仅当它在X的每一点连续.
    b. 令$\mathcal{B}_x$为在x的基，$\mathcal{C}_y$为在$y=f(x)$的基. 那么f在x连续，当且仅当对每个$C\in\mathcal{C}_y$存在$B\in\mathcal{B}_x$使得$B\subset f^{-1}[C]$.
13. 令$\mathcal{C}$为X的任意子集簇，令$\mathcal{B}$为由X和$\mathcal{C}$内集合的所有有限交组成的簇. 证明$\mathcal{B}$是包含$\mathcal{C}$的最弱拓扑的基.
14. 令X为不可数点集，$\mathcal{J}$是由空集和X的那些补为有限的子集所组成的集簇. 证明$\mathcal{J}$是X的一个拓扑，且空间$\langle X,\mathcal{J}\rangle$不满足第一可数性公理.
15. 令X为实数集，且令$\mathcal{B}$为所有形如$[a,b)$的区间的集合. 证明$\mathcal{B}$是X的拓扑$\mathcal{J}$的基(这个拓

扑称为半开区间拓扑）．证明$\langle X, \mathcal{J}\rangle$满足第一可数性公理但不满足第二可数性公理，且有理数在 X 稠密．请问$\langle X, \mathcal{J}\rangle$可否度量化？

16. 一个拓扑空间称为林德勒夫空间或有林德勒夫性质，若 X 的每个开覆盖有可数子覆盖．证明若 X 是第二可数的，那么它是林德勒夫空间．

177

17. 令 $X_1=\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ 且取 $X=X_1\cup\{\omega\}$，即集合 X 由 X_1增加一点得到．因此 X 由$\{\omega\}$和所有的自然数对$\langle j, k\rangle$组成．对每个自然数列 $s=\langle m_k\rangle$定义

$$B_{s,n}=\{\omega\}\cup\{\langle j,k\rangle: j\geqslant m_k \text{ 所有 } k\geqslant m\}.$$

a. 证明集合族 $B_{s,n}$与集合族$\{\langle j, k\rangle\}$构成 X 上一个拓扑的基．

b. 证明 ω 是 X_1 的闭包点，即使 X_1的序列$\langle x_n\rangle$均不以 ω 为聚点．

c. 空间 X 是可分的但不满足第一、第二可数性公理．

d. X 是林德勒夫空间吗？

8.3　分离公理与连续实值函数

拓扑空间的性质一般与度量空间的性质大不一样，通常假定拓扑空间满足一些附加条件，而对于度量空间这些附加条件都成立．在拓扑空间里考虑以下条件：

T_1：给定两个不同点 x 和 y，存在一个包含 y 但不包含 x 的开集．

T_2：给定两个不同点 x 和 y，存在不交开集 O_1和 O_2使得 $x\in O_1$且 $y\in O_2$．

T_3：除满足 T_1外，给定一个闭集 F 和一个不属于 F 的点 x，存在不交开集 O_1和 O_2使得 $x\in O_1$且 $F\subset O_2$．

T_4：除满足 T_1外，给定两个不交闭集 F_1和 F_2，存在不交开集 O_1和 O_2使得 $F_1\subset O_1$且 $F_2\subset O_2$．

上面这些被称为分离公理，度量空间满足所有这些公理．满足 T_1公理的拓扑空间称为**吉洪诺夫**空间，满足 T_2的拓扑空间称为**豪斯多夫**空间，满足 T_3的拓扑空间称为**正则**空间，满足 T_4的拓扑空间称为**正规**空间．从以下命题可知条件 T_1等价于每个由单点组成的集合都是闭的这一陈述．由此可见

178

$$T_4\Rightarrow T_3\Rightarrow T_2\Rightarrow T_1.$$

6. 命题　一个拓扑空间 X 满足 T_1当且仅当每个由单点组成的集合都是闭的．

证明　若每个集合$\{x\}$是闭的，给定两个不同点 x 和 y，取 $O=\sim\{x\}$，那么 O 是一个包含 y 但不包含 x 的开集．假定 T_1成立．每个 $y\in\sim\{x\}$包含在开集 $O\subset\sim\{x\}$内．因此集合$\sim\{x\}$是包含于它的开集的并，因而必须为开．所以$\{x\}$是闭的．■

以下命题给出了有关正规性的重要推论，其证明留给读者(习题 23 和 24)．

7. 乌雷松引理　令 A 与 B 为一个正规空间 X 的不交闭子集，那么存在一个定义在 X 上的实值连续函数 f，使得在 X 上 $0\leqslant f\leqslant 1$，在 A 上 $f\equiv 0$ 且在 B 上 $f\equiv 1$．

8. 铁策扩张定理　令 X 为正规拓扑空间，A 是 X 的一个闭子集，且 f 是 A 上的连续实值函数，那么 X 上存在一个连续实值函数 g，使得对所有 $x\in A$，$g(x)=f(x)$．

以下定理刻画了可分度量空间，它可用下节的概念来证明(见习题 30)．

9. 乌雷松度量化定理 每个满足第二可数性公理的正规拓扑空间是可度量化的.

若 X 是任意点集且 $\mathcal{F}$ 是 X 上的任意实值函数簇，那么总存在一个 X 上的最弱拓扑使得 $\mathcal{F}$ 中的每个函数是连续的，这是因为令 $\mathcal{C}=\{E: E=f^{-1}[O], f\in\mathcal{F}$ 且 O 是 $\mathbf{R}$ 的开子集$\}$且运用命题 5. 这个拓扑称为由 $\mathcal{F}$ 生成(或诱导)的**弱拓扑**. 若 $\mathcal{F}$ 内的函数在某个拓扑 $\mathcal{J}$ 都连续，那么由 $\mathcal{F}$ 生成的弱拓扑一般比 $\mathcal{J}$ 弱. 若这些拓扑重合，那么必须有足够多的连续实值函数. 这可由以下的一个条件来保证：给定闭集 F 和一个点 $x\notin F$，存在一个函数 $f\in\mathcal{F}$ 满足 $f(x)=1$ 且在 F 上 $f\equiv 0$. 当 $\mathcal{F}$ 是 X 上的所有连续实值函数所组成的空间 $C(X)$ 时，若这个条件满足，且假定 X 满足 T_1，则称 X 是**完全正则的**. 根据乌雷松引理，每个正规空间是完全正则的，且显而易见完全正则蕴涵着正则性. 因此用来定义完全正则的条件有时也称为 $T_{3\frac{1}{2}}$. 179

很一般的拓扑空间性质是非常奇特的，但这样的空间在分析学中看起来并不十分需要. 除度量空间外，我发现在分析中有用的空间是局部紧的豪斯多夫空间与拓扑向量空间. 在以后的章节会看到所有这些空间都是完全正则的. 然而，在代数几何中，却使用仿射或射影空间上的扎里斯基拓扑(见习题 29)，该拓扑是非豪斯多夫的紧 T_1 空间.

习题

18. a. 证明每个度量空间是豪斯多夫的.
    b. 证明每个度量空间是正规的. [提示：若 F_1 和 F_2 是不交闭集，令 $O_1=\{x: \rho(x, F_1)<\rho(x,F_2)\}$ 与 $O_2=\{x: \rho(x, F_2)<\rho(x, F_1)\}$.]
19. 令 X 由$[0, 1]$的数和 $0'$ 组成，且取集合(α, β)、$[0, \beta)$、$(\alpha, 1)$与$\{0'\}\cup(0, \beta)$为拓扑基. 证明存在 X 上的一个拓扑基，它是 T_1 的但不是豪斯多夫的.
20. 令 f 为拓扑空间 X 上的实值函数. 证明 f 是连续的当且仅当对于每个实数 a，集合$\{x: f(x)<a\}$和$\{x: f(x)>a\}$是开的. 证明 f 连续当且仅当对于每个实数 a，集合$\{x: f(x)>a\}$是开的，集合$\{x: f(x)\geqslant a\}$是闭的.
21. 若 f 和 g 是拓扑空间 X 上连续实值函数，那么函数 $f+g$, fg, $f\vee g$, $f\wedge g$ 是连续的[提示：如同通常的定义$(f\vee g)(x)=\max f(x)$, $g(x)$].
22. 令$\langle f_n\rangle$为从拓扑空间 X 到度量空间 Y 的连续函数序列. 若$\langle f_n\rangle$一致收敛于函数 f，则 f 是连续的.
23. a. 证明一个豪斯多夫空间是正规的当且仅当给定闭集 F 和包含 F 的开集 O，存在一个开集 U 使得 $F\subset U$ 且 $\overline{U}\subset O$.
    b. 令 F 为正规空间中包含于开集 O 的闭集. 通过无限次重复(a)部分的结果，证明有可能构造出一个开集族$\{U_r\}$，其对应于$(0, 1)$的形如 $r=p\cdot 2^{-n}$ 的每个有理数，使得 $F\subset U_r\subset O$ 且对于 $r<s$, $\overline{U}_r\subset U_s$. 180
    c. 令$\{U_r\}$为由(b)所构造的族，其中 $U_1=X$，令 f 为 X 上的实值函数，定义为 $f(x)=\inf\{r: x\in U_r\}$，那么 f 是一个连续函数，$0\leqslant f\leqslant 1$，满足在 F 上 $f\equiv 0$ 且在 $\tilde{O}$ 上 $f\equiv 1$.
    d. 令 X 为豪斯多夫空间. 证明 X 是正规的当且仅当对于 X 上的每对不相交闭集 A 和 B，存在 X 上的连续函数 f 使得 $0\leqslant f\leqslant 1$，在 A 上 $f\equiv 0$ 且在 B 上 $f\equiv 1$.
24. 用以下步骤证明**铁策扩张定理**:

a. 令 $h=f/(1+|f|)$，那么 $|h|<1$.

b. 令 $B=\{x: h(x)\leqslant -\frac{1}{3}\}$，$C=\{x: h(x)\geqslant \frac{1}{3}\}$，那么根据乌雷松引理，存在 X 上的一个实值连续函数 h_1，其在 B 上为 $-\frac{1}{3}$ 在 C 上为 $\frac{1}{3}$，而对所有 $x\in X$，$|h_1(x)|\leqslant \frac{1}{3}$.

显然，对所有 $x\in A$，$|h(x)-h_1(x)|<\frac{2}{3}$.

c. 用归纳法证明 X 上存在一个连续函数 h_n，使得对所有 $x\in X$，$|h_n(x)|<2^{n-1}/3^n$ 且对所有 $x\in A$，$|h(x)-\sum_{i=1}^{n} h_i(x)|<2^n/3^n$.

d. 序列 $\langle h_n\rangle$ 一致可和于 X 上的连续函数 k，$|k|\leqslant 1$ 且在 A 上 $k=h$.

e. 存在一个 X 上的连续函数 φ，在 A 上等于 1 且在 $\{x: k(x)=1\}$ 上等于 0.

f. 设 $g=\varphi k/(1-\varphi k)$.

25. 令 $\mathcal{F}$ 为集合 X 上的实值函数族. 证明形如 $\{x: |f_i(x)-f_i(y)|<\varepsilon$，对于某个 $\varepsilon>0$，某个 $y\in X$，$\mathcal{F}$ 内有限个函数 $f_1, \cdots, f_n$ 组成的集合$\}$的集合，给出了一个由 $\mathcal{F}$ 生成的 X 上的弱拓扑的基. 证明这个拓扑是豪斯多夫的当且仅当给定任何 X 内的不同点组成的点对 $\{x, y\}$，存在 $f\in\mathcal{F}$ 使得 $f(x)\neq f(y)$.

26. 令 $\mathcal{F}$ 为拓扑空间 $\langle X, \mathcal{J}\rangle$ 上的连续实值函数族. 证明若对每个闭集 F 和每个 $x\notin F$，存在 $f\in\mathcal{F}$ 使得 $f(x)=1$ 且在 F 上 $f\equiv 0$，那么由 $\mathcal{F}$ 生成的弱拓扑是 $\mathcal{J}$.

27. 证明每个完全正则空间是正则的.

28. 证明豪斯多夫空间的每个子集是豪斯多夫的.

29. 扎里斯基拓扑. 在 $\mathbf{R}^n$ 上令 $\mathcal{B}$ 为集族 $\{x: p(x)\neq 0\}$，其中 p 是一个 n 变量的多项式. 令 $\mathcal{J}$ 为由 $\mathcal{B}$ 内集合的所有有限交 $O=B_1\cap\cdots\cap B_k$ 所组成的族. 证明 $\mathcal{J}$ 给出了 $\mathbf{R}^n$ 的是 T_1 且紧的但不是 T_2 的拓扑.

30. 令 $A\subset B\subset \overline{A}$ 为豪斯多夫空间的子集，且令 f 和 g 为从 B 到拓扑空间 X 的两个映射，使得 $f(u)=g(u)$ 对所有 $u\in A$ 成立，那么 $f\equiv g$.

181

31. a. 证明命题 7.34 所给出的证明对任意拓扑空间都适用.

b. 证明当 X 是任意豪斯多夫空间时，命题 7.35 所给出的证明也成立. 为什么豪斯多夫空间是必要的?

8.4　连通性

一个拓扑空间 X 称为*连通的*，若不存在两个非空不相交的开集 O_1 和 O_2，使得 $X=O_1\cup O_2$，这样的一对开集称为 X 的一个*分离*. 由于每个集是另一个的补集，所以它们也是闭的. 任何一对其并是 X 的不相交非空闭集都是 X 的分离，这是因为它们中的每一个必须也是开的. 一个空间 X 是连通的当且仅当 X 的既开又闭的惟一子集是 X 和 $\varnothing$. 对于 X 的子集 E，若它在承袭自 X 的拓扑是连通空间的话，我们称它是连通的. 因此 E 是连通的：若不存在 X 内的开集 O_1 和 O_2 使得 $E\subset O_1\cup O_2$ 且 $E\cap O_1\cap O_2=\varnothing$.

10. 命题　*令 f 为从连通空间 X 映上拓扑空间 Y 的连续映射，那么 Y 是连通的.*

证明　令 O_1 和 O_2 为 Y 的分离，那么 $f^{-1}[O_1]$ 和 $f^{-1}[O_2]$ 是 X 的不相交开集，其并为 X.

由于 f 是映上的，所以 $f^{-1}[O_1]$ 和 $f^{-1}[O_2]$ 都不是空的，因而它们是 X 的一个分离. 因此若 Y 不连通，X 也不连通，由逆否关系得到命题的证明. ■

以下定理推广了介值定理：

11. 命题 *令 f 为定义在连通空间 X 上的实值连续函数，令 x 和 y 为 X 的两个点且 c 是一个实数，使得 $f(x)<c<f(y)$，那么存在 $z\in X$ 使得 $f(z)=c$.*

证明 若 f 取不到值 c，那么 $f^{-1}[(-\infty, c)]$ 和 $f^{-1}[(c, \infty)]$ 是不相交开集，其并为 X. 它们是非空的，这是由于 x 属于第一个集合，y 属于第二个集合. 因此 X 不连通. ■ 182

12. 命题 *$\mathbf{R}$ 的子集 E 是连通的当且仅当它是区间或者是单点.*

令 x_0 为拓扑空间 X 的点. 谈到 X 的包含 x_0 的分支 C，我们指的是包含 x_0 的所有连通集的并. 它是连通的(习题 32)且闭的(习题 33). 若 X 的两个分支有一个公共点，那么它们重合. 因此 X 是它的分支的不相交并集.

对于一个空间 X，若可以找到 X 的由连通集组成的基，则称它为**局部连通的**. 局部连通空间的分支是开的. 一个空间可以是连通的但不是局部连通的(习题 35).

习题

32. 令 $\{C_\alpha\}$ 为连通集簇，且假定它们中的任意两个集合有公共点，那么它们的并集 $G=\bigcup C_\alpha$ 也是连通的.
33. 令 A 为拓扑空间的连通子集，且假定 $A\subset B\subset \bar{A}$，那么 B 是连通的.
34. a. 令 E 为 $\mathbf{R}$ 的多于一点的连通子集. 证明 E 是一个区间. [若 x 和 y 属于 E，$x<y$，那么 $[x, y]\subset E$. 令 $a=\inf E$，$b=\sup E$，那么 $(a, b)\subset E\subset [a, b]$.]
    b. 证明 $\mathbf{R}$ 的区间是连通的. [令 $I=(a, b)$ 且令 O 为 I 的既开又闭的子集. 证明 $\sup\{y: (x, y)\subset O\}=b$，用习题 33 去仔细处理非开区间的情形.]
35. 对于拓扑空间 X，若给定 X 的两点 x 和 y，存在一个从 $[0, 1]$ 到 Y 的连续映射 f，使得 $f(0)=x$ 且 $f(1)=y$，我们称它为弧连通的.
    a. 证明弧连通空间是连通的.
    b. 在平面 $\mathbf{R}^2$ 考虑子空间
    $$X=\{\langle x,y\rangle : x=0, -1\leqslant y\leqslant 1\}\cup\{\langle x,y\rangle : y=\sin 1/x, 0<x\leqslant 1\}.$$
    证明 X 连通但不弧连通.
    c. 证明 $\mathbf{R}^n$ 的每个连通开集 G 是弧连通的. [令 $x\in G$，且令 H 为 G 中可用折线弧连接到 x 的点的集合，那么 H 开且在 G 内是闭的.]
36. 证明局部连通空间的每个分支是开的.
37. 证明习题 35b 中的集合 X 是连通的但不局部连通. 183

8.5 拓扑空间的乘积与直并

若 $\langle X, \mathcal{J}\rangle$ 和 $\langle Y, \mathcal{S}\rangle$ 是两个拓扑空间，通过取形如 $O_1\times O_2$ 的集簇作为该空间的基，定义了乘积 $X\times Y$ 上的拓扑，其中 $O_1\in\mathcal{J}$ 且 $O_2\in\mathcal{S}$. 这个拓扑称为 $X\times Y$ 的**积拓扑**. 若 X 和 Y 是度量空间，那么积拓扑与积度量所给出的拓扑是一致的. 若 $\langle X_\alpha, \mathcal{J}_\alpha\rangle$ 是任意带指标的拓扑空间族，

通过取形如$\bigtimes_\alpha O_\alpha$的集簇作为该空间的基，我们定义了$\bigtimes_\alpha X_\alpha$上的拓扑. 这里$O_\alpha\in\mathcal{J}_\alpha$且除有限个$\alpha$外$O_\alpha=X_\alpha$. 若所有$X_\alpha$是相同的空间$X$，而且被加标集$A$所加标，则将$\bigtimes_\alpha X_\alpha$写为$X^A$.

若$\langle X_\alpha, \mathcal{J}_\alpha\rangle$是拓扑空间簇，$Y$是它们的乘积，对每个$\alpha$，通过令$\pi_\alpha(x)$为$x$的$\alpha$重坐标，定义了$Y$到$X_\alpha$的映射$\pi_\alpha$(称为一个**投射**). 每个$\pi_\alpha$都是连续的，且$Y$的积拓扑是使得每个$\pi_\alpha$连续的最弱的拓扑.

若A是可数的且X可度量化，那么X^A可度量化. 由于在确定X^A时只有A的元素的数目是重要的，所以通常将可数乘积写为X^ω(或$X^{\mathbf{N}}$). 若用$\mathbf{2}$来表示具有两个元素的离散空间，那么$\mathbf{2}^\omega$同胚于康托尔集. 若我们不仅用$\mathbf{N}$表示可数集，还用它来表示具有离散拓扑的可数集，那么$\mathbf{N}^\omega$或$\mathbf{N}^{\mathbf{N}}$就是同胚于无理数集的拓扑空间.

若$I=[0, 1]$，那么I^A称为一个*立方体*. 立方体I^ω可度量化，且称为*希尔伯特立方体*. 令X为任意集且$\mathcal{F}$为X上满足$0\leqslant f\leqslant 1$，且对X中的两个不同点x和y存在$f\in\mathcal{F}$使得$f(x)\neq f(y)$的函数f所构成的族，那么若令每个f对应于其x重坐标为$f(x)$的元素，则$\mathcal{F}$可等同于I^X的一个子集. 从$\mathcal{F}$到I的将f映到$f(x)$的映射仅仅是限制在$\mathcal{F}$像的投射π_x. $\mathcal{F}$作为I^X的一个子空间的拓扑称为*点式收敛拓扑*.

另一方面，若通过令每个x对应于其f重坐标为$f(x)$的元素，拓扑空间X可等同于$I^{\mathcal{F}}$的一个子集. X作为$I^{\mathcal{F}}$的子空间的拓扑是由$\mathcal{F}$生成的弱拓扑. 若X是一个拓扑空间且每个属于$\mathcal{F}$的f是连续的，那么X到它在$I^{\mathcal{F}}$的像的映射是连续的，而且若$\mathcal{F}$具有性质：对于每个闭子集$F\subset X$和每个$x\notin F$，存在一个$f\in\mathcal{F}$满足$f(x)=1$且在F上$f(x)\equiv 0$，那么X同胚于它在$I^{\mathcal{F}}$的像.

184

若$\langle X, \mathcal{J}\rangle$和$\langle Y, \mathcal{S}\rangle$是两个拓扑空间，且满足$X$和$Y$不相交，可通过取开集为所有满足$O\cap X\in\mathcal{J}$且$O\cap Y=\mathcal{S}$的$O\subset Z$的集合，以定义并集$Z=X\cup Y$的拓扑. 我们称具有这个拓扑的空间为$X$和$Y$的*直并*，且将它记为$X\mathring{\bigcup} Y$. 若$\{X_\alpha, \mathcal{J}_\alpha\}$是任何带指标的拓扑空间族，且满足$\alpha\neq\beta$，$X_\alpha\cap X_\beta=\varnothing$，那么定义它们的直并$Z=\mathring{\bigcup} X_\alpha$为这些$X_\alpha$的并. 对于$O\subset Z$，若对每个$\alpha$有$O\cap X_\alpha\in\mathcal{J}_\alpha$，则定义它为开的. 每个空间$X_\alpha$称为*直接被加元*[⊖]，若集合$X_\alpha$并非全部不相交，可以取$X_\alpha^*=X_\alpha\times\{\alpha\}$并考虑直和$\mathring{\bigcup} X_\alpha^*$.

如同将在习题部分要看到的那样，一个直并的拓扑性质仅依赖于直接被加元：不同被加元之间不发生关联. 因此，若可证明一个拓扑空间是直并的，则可通过研究单个被加元来研究它的性质.

假定拓扑空间X是不相交开集簇$\{X_\alpha\}$的并集，那么X就是这些X_α的直并. 为看到X和$\mathring{\bigcup} X_\alpha$有相同的拓扑，观察发现，若$O$是$X$的开集，那么对每个$\alpha$，$O\cap X_\alpha$是开的，因而$O$是$\mathring{\bigcup} X_\alpha$的开子集. 反之，若$O$是$\mathring{\bigcup} X_\alpha$的开子集，那么$O=\bigcup(O\cap X_\alpha)$，且每个$O\cap X_\alpha$是

⊖ 这个术语自"并"称为"和"时起就遗留下来.

X_α 的开子集.

习题

38. 令 $Z=\overset{\circ}{\bigcup} X_\alpha$.
    a. 证明映射 $f:: Z\to Y$ 连续当且仅当每个限制 $f \mid X_\alpha$ 连续.
    b. 证明集合 $F\subset Z$ 是闭的当且仅当对于每个 α，$F\cap X_\alpha$ 是闭的.
    c. 证明 Z 是豪斯多夫的当且仅当每个 X_α 是豪斯多夫的.
    d. 证明 Z 是正规的当且仅当每个 X_α 是正规的.
39. a. 证明若拓扑空间 X 的子集 X_1 是直接被加数(在某个直并)，则 X_1 既开又闭.

185

    b. 若 X_1 是 X 的既开又闭的子集，那么 $X=X_1 \overset{\circ}{\bigcup} X_2$，其中 $X_2=X\sim X_1$.
40. 拓扑空间的性质 P 说为是*局部性质*，假定只要 X 有一个基，而且该基的每个元素都具有性质 P，那么空间 X 就具有性质 P.
    a. 证明有关正则、完全正则、吉洪诺夫的这些性质都是局部性质.
    b. 若 P 是局部性质且空间 X 具有 P，那么 X 的每个开子集具有 P.
    c. 令 $X=\overset{\circ}{\bigcup} X_\alpha$ 是一个直并，那么 X 具有局部性质 P 当且仅当每个 X_α 具有 P.
41. 令(X, ρ)为具有扩充实值度量的度量空间且 X_α 是它的部分，即在等价关系 $\rho(x, y)<\infty$ 下的等价类(参见习题 7.3b). 证明 $X=\overset{\circ}{\bigcup} X_\alpha$ 是直并.
42. 证明豪斯多夫空间的直积是豪斯多夫空间.
43. 证明在定义积拓扑时所取的基集簇满足命题 3 的条件. 证明若$\langle X, \rho\rangle$和$\langle Y, \sigma\rangle$是两个度量空间，那么 $X\times Y$ 上的积拓扑与积度量所给出的拓扑是一致的.
44. 证明 X^A 是从 A 映射到 X 的所有函数的集合，其拓扑基由形如$\{f: f(\alpha_1)\in O_1, f(\alpha_2)\in O_2, \cdots, f(\alpha_n)\in O_n\}$的开集给出，其中$\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$是 A 的某个有限子集，而$\{O_1, \cdots, O_n\}$是 X 的有限开子集簇. 证明 X^A 的序列$\langle f_n\rangle$收敛到 f 当且仅当对每个 α 属于 A，$f_n(\alpha)$ 收敛到 $f(\alpha)$.
45. 证明若 X 可度量化且 A 可数，那么 X^A 可度量化. [提示：X 总能被一个有界度量 ρ 度量化. 定义 X^A 上的度量 σ 为 $\sigma(x,y)=\sum_{\alpha\in A} 2^{-n}\rho(x_\alpha, y_\alpha)$.]
46. 证明每个投射 π_α 是连续的，且 X^A 上的积拓扑是使每个 π_α 连续的最弱的拓扑.
47. 证明 2^ω 同胚于康托尔三分点集.
48. a. 若 $\mathcal{F}$ 具有性质：给定一个闭集 F 和 $x\notin F$，存在 $f\in\mathcal{F}$ 使得 $f[F]=0$ 且 $f(x)=1$，证明本书中所叙述的拓扑空间 X 和它在 $I^{\mathcal{F}}$ 的像的对应是同胚的.
    b. 证明若 X 是满足第二可数性公理的正规空间，那么可以找到一个具有(a)性质的可数连续函数族 $\mathcal{F}$.
    c. 证明乌雷松度量化定理.

186

49. 证明连通空间的乘积是连通的.

*8.6　拓扑性质与一致性质

度量空间有三类性质：拓扑性质，它在同胚下保持不变；一致性质，它在一致同胚下保持不变；度量性质，它在等距同构下保持不变．度量性质依它们的本性而被限定在度量空间的范畴．任何仅由开集定义的性质是拓扑性质(反之亦然)，这些性质通常可推广到拓扑空间的范畴．拓扑性质和概念包括连续、收敛、闭包等等．

一致性质，例如一致连续、一致收敛、等度连续性、全有界性和完备性都介于拓扑与度量性质之间．它们的定义依赖于对于不同点的邻域尺寸的对比能力．在度量空间中这可以通过取给定半径的球为同一尺寸来得到．这些概念能够推广到称为**一致空间**的空间范畴．在这些空间中通过具体化近域来定义集合 X 上的**一致结构**，每个近域为一邻域族，每个邻域对应 X 的每一点．我们将两个来自同一近域的邻域视为具有相同尺寸．因此对 $\epsilon>0$，每个半径为 ϵ 的球构成度量空间的一个近域．有关一致结构的一般理论超出了本书的范围，建议有兴趣的读者参考 Kelley[9](见第 6 章，特别注意习题 6H)和 Bourbaki[15]．

本书所感兴趣的一致结构是那些，X 有一个代数结构允许我们对不同点的邻域有一个自然的比较．例如，X 既是一个向量空间又是一个拓扑空间，且平移是其到自身的连续映射，那么就得到一个自然的一致结构：我们说 x 的邻域 N_x 与 y 的邻域 N_y 具有相同尺寸，若 N_y 是 N_x 经过平移向量 $y-x$ 得到．因此给出原点的邻域 N 且取 N_x 为 $N+x$，可得到一个近域．类似的考虑还适用于 X 是拓扑群．当 X 是非交换拓扑群，我们可以得到不同的一致结构．这主要依赖于是用左平移还是右平移．

187

有些概念(例如一致收敛性和等度连续性)是混合的：它们是关于从空间 X 到空间 Y 的映射，且依赖于 Y 的一致结构，但仅要求 X 的拓扑结构．因此一个从集合 X 到度量空间 (Y, σ) 的映射序列 f_n 称为**一致收敛**于映射 f，若给定 $\epsilon>0$，存在 N 使得对所有 $n\geqslant N$ 和所有 $x\in X$，$\sigma(f_n(x), f(x))<\epsilon$ 成立．对于这个概念我们不要求 X 上有任何结构．类似地，从拓扑空间 X 到度量空间 (Y, σ) 的映射族 $\mathcal{F}$ 称为在点 $x_0\in X$ **等度连续**，若给定 $\epsilon>0$，存在 x_0 的邻域 O 使得对每个 $x\in O$ 和每个 $f\in\mathcal{F}$，$\sigma(f(x), f(x_0))<\epsilon$ 成立．若 $\mathcal{F}$ 在每一点等度连续，那么 $\mathcal{F}$ 在 X 上等度连续．

也存在对应于紧集上一致收敛的纯粹拓扑概念(紧开拓扑，见习题 9.8)和等度连续性(拓扑等度连续性，见 14.2 节或均匀连续性，见 Kelley[9]第 7 章)．

习题

50. a. 令 $\langle f_n\rangle$ 为从拓扑空间 X 到度量空间 (Y, σ) 的连续映射序列，且一致收敛于映射 f．证明 f 是连续的．
    b. 从拓扑空间 X 到度量空间 (Y, σ) 的连续映射序列 $\langle f_n\rangle$ 称为**一致柯西序列**，若给定 $\epsilon>0$，存在一个 N 使得对所有 $n, m\geqslant N$ 和所有 $x\in X$，$\sigma(f_n(x), f_m(x))<\epsilon$．证明若 $\langle f_n\rangle$ 是一个一致柯西序列，且若 Y 是完备的，那么存在连续映射 f 使得 $\langle f_n\rangle$ 一致收敛于它．
51. 若仅假设 X 是可分拓扑空间，证明阿斯科利-阿尔泽拉定理(7.40)和它的系仍然成立．[对于一致收敛性的陈述，见习题 9.8b.]

*8.7 网格

谈到有向系我们指的是集合 A 与满足以下条件的关系 $\prec$：

i. 若 $\alpha\prec\beta$ 且 $\beta\prec\gamma$，那么 $\alpha\prec\gamma$.

ii. 若 α，$\beta\in A$，存在一个 $\gamma\in A$ 使得 $\alpha\prec\gamma$ 与 $\beta\prec\gamma$.

一个有向系的例子是正整数集 N，关系 $\prec$ 取为 $\leqslant$. 另一个广泛使用的有向集是所有包含点 x 的开集，且 $O_1\prec O_2$ 定义为 $O_1\supset O_2$. [188]

一个网格是一个从有向系到拓扑空间 X 的映射. 若这个有向系是整数集，我们得到序列，而网格可以认为是序列的推广. 通常用 x_α 表示网格在 α 的值，而用 $\langle x_\alpha\rangle$ 表示网格自身. 点 x 称为网格 $\langle x_\alpha\rangle$ 的*极限*，若对每个包含 x 的开集 O，存在一个 $\alpha_0\in A$ 使得对所有 $\alpha\succ\alpha_0$，$x_\alpha\in O$. 一个点 x 称为 $\langle x_\alpha\rangle$ 的*聚点*，若给定包含 x 的开集 O 且给定 $\alpha\in A$，存在 $\beta\succ\alpha$ 使得 $x_\beta\in O$. 对于序列，这些概念与先前关于极限和聚点的概念重合.

13. 命题 *点 x 是集合 E 的闭包点当且仅当它是 E 的网格 $\langle x_\alpha\rangle$ 的极限.*

证明 “当”部分可直接由极限与闭包点的定义得到. 因此假定 x 是 E 的闭包点. 我们取有向系 A 为所有包含 x 的开集簇，且若 $O_1\supset O_2$ 设 $O_1\prec O_2$. 由于 x 是 E 的闭包点，对每个 $O\in A$ 存在一个点 x_O 属于 $O\cap E$，那么 $\langle x_O\rangle$ 是 E 的网格，它收敛于 x，这是由于给定包含 x 的 O，对所有 $O'\succ O$ 有 $x_{O'}\in O$. ■

习题

52. 证明 X 是豪斯多夫当且仅当 X 的每个网格至多有一个极限. [为证明“当”部分，令 x 和 y 为不能分离的两个点，且令有向系为所有开集中的对 $\langle A, B\rangle$ 所成的簇，其中 $x\in A$，$y\in B$. 选取属于 $A\cap B$ 的 $x_{\langle A,B\rangle}$，并证明 x 和 y 都是这个网格的极限.]

53. 证明从 X 到 Y 的函数 f 在点 x 是连续的，当且仅当对于每个收敛到 x 的网格 $\langle x_\alpha\rangle$，网格 $\langle f(x_\alpha)\rangle$ 收敛到 $f(x)$.

54. 令 X 为任意集且令 f 为 X 上的实值函数. 令 A 为 X 的所有有限子集组成的系统，其中 $F\prec G$ 意味着 $F\subset G$，对每个 $F\in A$，令 $y_F=\sum_{x\in F}f(x)$. 证明网格 $\langle y_F\rangle$ 有极限当且仅当 $f(x)=0$ 除 x 在可数子集 $\{x_n\}$ 中外成立，且 $\sum|f(x_n)|<\infty$. 在这种情形下，$\lim y_F=\sum_{n=1}^{\infty}f(x_n)$.

55. 令 $X=\mathop{\times}\limits_{\alpha}X_\alpha$，那么 X 的网格 $\langle x_\beta\rangle$ 收敛到 x 当且仅当 x_β 的每个坐标收敛到 x 的相应坐标. [189]

第 9 章　紧空间与局部紧空间

9.1　紧空间

我们所研究的度量空间的紧的概念可推广到某类拓扑空间. 因此说拓扑空间的开集簇$\mathcal{U}$是集合 K 的开覆盖，若 K 包含于$\mathcal{U}$中的集合的并集. 对于一个拓扑空间 X，若 X 的每个开覆盖$\mathcal{U}$有一个有限子覆盖，即可找到一个有限子簇$\{O_1, O_2, \cdots, O_N\}\subset\mathcal{U}$使得

$$X=\bigcup_{i=1}^{N} Q_i.$$

则说 X 是**紧的**. 对于拓扑空间的子集 K，若它作为 X 的子空间是紧的，就称它为紧的. 鉴于子空间拓扑的定义，这等价于说若每个用 X 的开集来覆盖的 K 的覆盖$\mathcal{U}$有一个有限子覆盖，则 K 是紧的. 海涅-博雷尔定理说的是实数集的每个有界闭子集是紧的.

若$\mathcal{U}$是空间 X 的开覆盖，则它的集合的补集所组成的集簇$\mathcal{F}$是一个交为空的闭集簇，且反过来也成立. 因此一个空间 X 是紧的当且仅当每个交集为空的闭集簇有一个有限子簇其交集为空. X 中的集簇$\mathcal{F}$，若$\mathcal{F}$的任何有限子簇有一个非空交，称为具有*有限交性质*. 因此有以下命题：

190

1. 命题　*拓扑空间 X 是紧的当且仅当每个具有有限交性质的闭集簇$\mathcal{F}$有一非空交集.*

紧的概念与闭的概念密切相关，以下命题表明紧就是一种绝对形式的闭.

2. 命题　*紧空间的闭子集是紧的. 豪斯多夫空间的一个紧子集是闭的.*

证明　令 X 紧，F 为 X 的闭子集，且$\mathcal{U}$为 F 的开覆盖，那么$\mathcal{U}\cup\{\widetilde{F}\}$是 X 的开覆盖，因此必有一个有限子覆盖$\{\widetilde{F}, O_1, \cdots, O_N\}$，那么集合 $O_1, O_2, \cdots, O_N$覆盖 F，因而$\mathcal{U}$有一个有限子覆盖.

假定 X 是一个豪斯多夫空间，且 K 是 X 的一个紧子集. 下面来证明 $\widetilde{K}$ 是开的，令 $y\in\widetilde{K}$. 由于 X 是豪斯多夫的，那么对于每个 $x\in K$，存在不相交的开集 O_x和 N_x，使得 $x\in O_x$且 $y\in N_x$. 集合$\{O_x: x\in K\}$构成一个 K 的开覆盖，因而存在一个覆盖 K 的有限子簇$\{O_{x_1}, O_{x2}, \cdots, O_{x_n}\}$. 令

$$N=\bigcap_{i=1}^{n} N_{x_i},$$

那么 N 是一个包含 y 的开集且不与任何集合 O_{x_i}相交. 由于 $K\subset\bigcup O_{x_i}$，N 不与 K 相交，因而包含在 $\widetilde{K}$ 中. 所以 $\widetilde{K}$ 是开的，K 是闭的. ■

3. 系　*每个紧实数集都是闭的与有界的.*

证明　由于 $\mathbf{R}$ 是豪斯多夫的，所以 $\mathbf{R}$ 的紧子集 K 必须是闭的. 此外，区间 $I_n=(-n, n)$构成 K 的一个开覆盖，因而它们中有一些肯定要覆盖 K. 因此 K 必须有界. ■

4. 命题　*紧集的连续像是紧的.*

证明　令 f 为从紧集 K 到拓扑空间 Y 映上的连续函数. 若$\mathcal{U}$是 Y 的开覆盖，取遍所有的

191

$O\in\mathcal{U}$则集簇 $f^{-1}[O]$是 K 的开覆盖. 根据 K 的紧性，$\mathcal{U}$中存在有限个集合 $O_1, \cdots, O_n$使得集

合 $f^{-1}[O_i]$覆盖 K. 由于 f 是映上的，所以集合 O_1，…，O_n覆盖 Y. ■

5. 命题　紧空间到豪斯多夫空间的一对一映上的连续映射是一个同胚.

证明　令 X 为紧空间，Y 为豪斯多夫空间，f 是一对一映上 Y 的连续映射. 为证明 f 是一个同胚，仅需证明它将开集映到开集或等价地将闭集映到闭集. 但若 F 是 X 的一个闭子集，根据命题 2，它是紧的，因而根据命题 4，$f[F]$是紧的，再根据命题 2，它一定是闭的. ■

有时紧的性质用加细而非子覆盖来表述. X 的一个开覆盖$\mathcal{V}$说为是开覆盖$\mathcal{U}$的**加细**(或加细$\mathcal{U}$)，若$\mathcal{V}$的每个元素都是$\mathcal{U}$的某个元素的子集，那么不难看到 X 是紧的当且仅当 X 的每个开覆盖有一个有限加细. 为以后的应用，我们也注意到，X 的任何两个开覆盖$\mathcal{U}$和$\mathcal{V}$有一个共同的加细，即所有形如 $U\cap V$ 的集合，其中 $U\in\mathcal{U}$且 $V\in\mathcal{V}$，所组成的集簇.

习题

1. 证明 X 是紧的当且仅当它的每个开覆盖有一个有限加细.
2. 令$\langle K_n\rangle$为递减的紧集序列，即 $K_{n+1}\subset K_n$，令 O 为满足 $\bigcap_{n=1}^{\infty}K_n\subset O$ 的开集，那么对某个 n，$K_n\subset O$.
3. 证明紧豪斯多夫空间是正则的.
4. 证明紧豪斯多夫空间是正规的.
5. 令 f 为紧空间 X 到豪斯多夫空间 Y 映上的连续映射，那么任意从 Y 到 Z 的映射 g，使得 $g\circ f$是连续的，其自身也必定是连续的.
   a. 证明若$(X,\mathcal{J})$是紧空间，则对于所有比$\mathcal{J}$弱的$\mathcal{J}_1$，$(X,\mathcal{J}_1)$是紧的.
   b. 证明若$(X,\mathcal{J})$是豪斯多夫空间，则对于所有比$\mathcal{J}$强的$\mathcal{J}_2$，$(X,\mathcal{J}_2)$是豪斯多夫空间.
   c. 证明若$(X,\mathcal{J})$是紧豪斯多夫空间，则任何弱拓扑不是豪斯多夫的，而任何强拓扑不是紧的. [192]
6. 令 X 为紧空间，$\mathcal{F}$为从 X 到度量空间$\langle Y,\sigma\rangle$的等度连续映射族，令$\langle f_n\rangle$为$\mathcal{F}$中的序列使得对于每个 $x\in X$，$f_n(x)\to f(x)$，那么在 X 上$\langle f_n\rangle$一致收敛于 f.
7. 令 X 拓扑空间，$\langle C_n\rangle$为递减紧连通集序列，那么$\bigcap C_n$是紧连通的. 一个多于一点的紧连通集合称为一个连续统.
8. 紧开拓扑. 令 X 和 Y 为拓扑空间，X^Y为从 X 到 Y 的映射所组成的空间. 在 X^Y 上，通过取形如 $N_{K,O}=\{f\in X^Y: f[K]\subset O\}$的集合作为子基集，来定义一种称为紧开拓扑的拓扑，其中 K 是 X 的紧子集，而 O 是 Y 的开子集. 因此紧开拓扑是 X^Y上使得集合 $N_{K,O}$为开集的最弱拓扑.
   a. 令$\langle f_n\rangle$为从 X 到 Y 的映射序列，其在紧开拓扑下收敛于映射 f：$X\to Y$，那么对每个 $x\in X$ 有 $f(x)=\lim f_n(x)$.
   b. 令$\langle f_n\rangle$为从拓扑空间 X 到度量空间(Y,σ)的连续映射序列. 证明在紧开拓扑下，$\langle f_n\rangle$收敛于映射 f：$X\to Y$ 当且仅当在 X 的每个紧子集 C 上，$\langle f_n\rangle$一致地收敛于 f.

9.2　可数紧性与波尔查诺-魏尔斯特拉斯性质

一个比紧性弱的概念是可数紧性：对于一个空间 X，若它的每个可数开覆盖有一个有限子覆盖，则称它为**可数紧的**. 我们定义拓扑空间为林德勒夫的，若其每个开覆盖有一可数子覆

盖. 因此一个拓扑空间为紧的当且仅当它既是林德勒夫的又是可数紧的. 由于每个第二可数空间是林德勒夫的，这就得到了在已满足第二可数性公理的前提下，可数紧性等价于紧性. 将命题 4 的证明运用于可数紧的情形就得到以下命题：

6. 命题　可数紧空间的连续像是可数紧的.

若一个拓扑空间 X 的每个序列 $\langle x_n \rangle$ 至少有一个聚点，即若存在一个 $x \in X$，使得对每个包含 x 的开集 O 和每个 N，存在一个 $n \geqslant N$ 满足 $x_n \in O$. 我们称该拓扑空间具有**波尔查诺-魏尔斯特拉斯性质**.

193

7. 命题　一个拓扑空间具有波尔查诺-魏尔斯特拉斯性质当且仅当它是可数紧的.

证明　显而易见 X 是可数紧的当且仅当每个具有有限交性质的可数闭集簇 $\mathcal{F}$ 有一非空交集. 假定 X 具有波尔查诺-魏尔斯特拉斯性质，且 $\mathcal{F} = \{F_i\}$ 是具有有限交性质的可数闭集族.

由于不存在 n 使得交 $H_n = \bigcap_{k=1}^{n} F_k$ 为空，那么对于每个 n 可以选择一个元素 $x_n \in H_n$. 根据波尔查诺-魏尔斯特拉斯性质，序列 $\langle x_n \rangle$ 有一聚点 x. 但对于所有 $n \geqslant i$，$x_n \in F_i$，因而 x 必属于 F_i，这是由于 F_i 是闭的. 因此 x 属于每个 F_i，即属于它们的交集.

另一方面，假定 X 是可数紧的，$\langle x_i \rangle$ 是 X 中的序列，令 B_n 为集合 $\{x_n, x_{n+1}, \cdots,\}$，那么 $\{\overline{B_n}\}$ 是具有有限交性质的可数闭集簇，因此存在一个点 x 属于 $\bigcap \overline{B_n}$. 由于给定 N 和任何包含 x 的开集 O，有 $x \in \overline{B}_N$，所以点 x 是该序列的聚点. 因而当 $n \geqslant N$ 时，必有一个 $x_n \in O$. ■

与波尔查诺-魏尔斯特拉斯性质相似的概念是序列紧性. 对于一个空间 X，若 X 中的每个无限序列有一收敛子列，我们说该空间为**序列紧的**. 作为博雷尔-勒贝格定理的一个结果，对于度量空间来说，紧性、可数紧性、序列紧性这三者是等同的. 一般而言，我们必须区分这些概念：习题 11 给出一个序列紧的但不是紧的空间例子；习题 41 给出一个紧的但不序列紧的例子；习题 12 表明一个空间可以是紧的而无须是可分或第一可数的.

8. 命题　序列紧的空间是可数紧的. 满足第一可数性公理的可数紧空间是序列紧的.

证明　序列紧性蕴涵着波尔查诺-魏尔斯特拉斯性质，其等价于可数紧性. 而命题的第二部分就是习题 8.11 的直接推论. ■

194

9. 命题　令 f 为定义在可数紧的空间 X 上的连续实值函数，那么 f 有界且能取到它的最大值与最小值.

用命题 6 以及 $\mathbf{R}$ 的每个可数紧子集是闭与有界的这一事实可给出该命题的证明. 然而，我们给出了一个包含更多内容的直接证明. 一个拓扑空间的实值函数称为**上半连续的**，若对于每个实数 α 集合 $\{x: f(x) < \alpha\}$ 是开的. 若 f 连续，那么 f 和 $-f$ 都是上半连续的. 这表明命题 9 是以下命题的推论：

10. 命题　令 f 为定义在可数紧空间 X 的上半连续实值函数，那么 f 有上界且取到它的最大值.

证明　集合 $O_n = \{x: f(x) < n\}$ 构成 X 的一个可数开覆盖，因而必须存在一个有限子覆盖 $\{O_1, \cdots, O_N\}$. 但这蕴涵 $X \subset O_N$，因此对于所有 x，$f(x) < N$，因而 f 有上界. 令 $\beta = \sup\{f(x): x \in X\}$，那么集合

$$F_n = \left\{x: f(x) \geqslant \beta - \frac{1}{n}\right\}$$

构成一个具有有限交性质的可数闭集簇. 因此存在一个属于每个 F_n 的 y，那么 $f(y)=\beta$ 且 f 在 y 取到最大值. ■

11. 命题(迪尼) 令 $\langle f_n \rangle$ 为在可数紧空间 X 上的上半连续的实值函数序列，且假定对于每个 $x \in X$，序列 $\langle f_n(x) \rangle$ 单调递减收敛于零，那么 $\langle f_n \rangle$ 一致收敛于 0.

证明 选取 $\varepsilon>0$，且令 $O_n=\{x: f_n(x)<\varepsilon\}$. 由于 f_n 是上半连续的，所以 O_n 是开的. 因为对于每个 x，$f_n(x) \to 0$，故有 $X \subset \bigcup O_n$. 根据 X 的可数紧性，存在有限个开集 $\{O_1, \cdots, O_N\}$，其并集包含 X. 但这蕴涵 $O_N = X$，因而对于所有 x，$f_N(x)<\varepsilon$. 若 $n \geqslant N$，我们有 $0 \leqslant f_n(x) \leqslant f_N(x) < \varepsilon$，因此序列 $\langle f_n \rangle$ 一致收敛到 0。 ■ 195

习题

9. a. 实值函数 f 称为下半连续的，若 $-f$ 是上半连续的. 证明空间 X 上的实值函数连续当且仅当它既上半连续又下半连续.
   b. 证明若 f 和 g 上半连续，则 $f+g$ 上半连续.
   c. 令 $\langle f_n \rangle$ 为递减的上半连续函数序列，其逐点地收敛于实值函数 f，那么 f 上半连续.
   d. 令 $\langle f_n \rangle$ 为可数紧空间上的递减的上半连续函数序列，且假定 $\lim f_n(x) = f(x)$，其中 f 是下半连续实值函数，那么 f 是连续的，且 $\langle f_n \rangle$ 一致收敛于 f.
   e. 证明若上半连续函数序列 $\langle f_n \rangle$ 一致收敛于函数 f，则 f 也是上半连续.
10. 令 X 为正规拓扑空间. 那么以下命题等价：
   i. X 是可数紧的.
   ii. X 上的每个连续实值函数有界.
   iii. X 上的每个有界连续实值函数可取到它的最大值.
11. 令 X 为小于第一不可数序数的序数集合，且令 $\mathcal{B}$ 为形如 $\{x: x<a\}$、$\{x: a<x<b\}$ 和 $\{x: a<x\}$ 的集簇.
   a. 证明 $\mathcal{B}$ 是 X 的拓扑的一个基.
   b. 证明 X 序列紧但非紧. [提示：用该序数的良序性.]
   c. 证明若 f 是 X 上的连续实值函数，则存在一个 x_0，使得对于所有 $x \geqslant x_0$，$f(x)=f(x_0)$. [提示：证明使得 $f(x)<\overline{\lim} f$ 的 x 的集合可数.]
12. 令 Y 为小于或等于第一不可数序数 Ω 的序数集合，且令 $\mathcal{B}$ 为形如 $\{x: x<a\}$、$\{x: a<x<b\}$ 和 $\{x: a<x\}$ 的集簇.
   a. 证明 $\mathcal{B}$ 是 X 的拓扑的一个基.
   b. 证明 X 紧但既非可分也非第一可数.

9.3 紧空间的积

本节我们证明吉洪诺夫定理——紧空间的积是紧的，它可能是一般拓扑学中最重要的定理. 它在分析中的绝大部分应用仅用到(闭)区间的乘积这一特殊情形，但这个特殊情形并不见 196

得比一般情形更容易证明．下面从两个关于有限交性质的引理开始．

12. 引理　令$\mathfrak{A}$为 X 的子集簇，且假定$\mathfrak{A}$具备有限交性质，那么存在一个簇$\mathcal{B}\supset\mathfrak{A}$使得$\mathcal{B}$具有有限交性质，且关于该性质是最大的；即没有包含$\mathcal{B}$的具有有限交性质的簇．

证明　考虑所有包含$\mathfrak{A}$且具有有限交性质的簇所构成的族，这个族是以包含为偏序的．根据豪斯多夫最大原理，存在一个极大线性有序的子族$\mathcal{F}$．令$\mathcal{B}$为$\mathcal{F}$中簇的并．若 B_1，…，B_n属于$\mathcal{B}$，则每个 B_i属于某个$\mathcal{C}_i\in\mathcal{F}$．由于$\mathcal{F}$是以包含为线性有序的，这些簇中必有一个$\mathcal{C}_k$包含其他簇，因而所有 B_i 都属于$\mathcal{C}_k$．由于$\mathcal{C}_k$具有有限交性质，$\bigcap B_i\neq\varnothing$，因此$\mathcal{B}$具有有限交性质．若$\mathcal{B}'\supset\mathcal{B}$且$\mathcal{B}'$具有有限交性质，则$\mathcal{B}'$包含$\mathcal{F}$中的每个$\mathcal{C}$，因而根据$\mathcal{F}$的极大性它必须属于$\mathcal{F}$．因此$\mathcal{B}$是这样集簇的并，其中一个是$\mathcal{B}'$的并，因而$\mathcal{B}'\subset\mathcal{B}$．这表明$\mathcal{B}$关于有限交性质是最大的．■

13. 引理　令$\mathcal{B}$为 X 的子集簇，且关于有限交性质最大，那么$\mathcal{B}$中有限个集合的每个有限交仍然在$\mathcal{B}$，且与$\mathcal{B}$的每个集相交的集合还属于$\mathcal{B}$．

证明　令$\mathcal{B}'$为$\mathcal{B}$中集合的有限交所组成的簇，那么$\mathcal{B}'$是一个具有有限交性质且包含$\mathcal{B}$的簇．因此根据$\mathcal{B}$的极大性，$\mathcal{B}'=\mathcal{B}$．

假定集合 C 与$\mathcal{B}$的每个元素相交．由于$\mathcal{B}$包含$\mathcal{B}$中每个集合的有限交，这就得到$\mathcal{B}\cup\{C\}$具有有限交性质，根据极大性$\mathcal{B}\cup\{C\}=\mathcal{B}$，因而 $C\in\mathcal{B}$．■

14. 定理（吉洪诺夫）　令$\langle X_\alpha\rangle$为紧拓扑空间的加标族，那么积空间 $\underset{\alpha}{\times}X_\alpha$ 在积拓扑下是紧的．

197

证明（布尔巴基）　令 π_α 为 X 到 X_α 的映射，它将每个 $x\in X$ 映到它的α 重坐标，那么形如$\pi_\alpha^{-1}[O_\alpha]$的集合的有限交所构成的集合，其中 O_α 在 X_α 开，构成 X 的拓扑的一个基$\mathcal{N}$．

令$\mathfrak{A}$为具有有限交性质的 X 的任意闭子集簇，且令$\mathcal{B}$为包含$\mathfrak{A}$且关于有限交性质最大的集簇（不必闭）．令$\mathcal{B}_\alpha$ 为形如$\pi_\alpha[B]$，其中 $B\in\mathcal{B}$的 X_α 的子集簇，那么$\mathcal{B}_\alpha$ 具有有限交性质，且根据 X_α 的紧性，可以选取一个点 x_α 属于$\bigcap_{\mathcal{B}}\overline{[\pi_\alpha(B)]}$，即点 x_α 是每个集合$\pi_\alpha[B]$的闭包点．令 x 为 X 中的点，其α 重坐标是 x_α．

对于某个α 和某个属于 X_α 的使得 $x_\alpha\in O_\alpha$ 的开集 O_α，考虑形如$\pi_\alpha^{-1}[O_\alpha]$的集合 S．由于对于每个 $B\in\mathcal{B}$，x_α 是$\pi_\alpha[B]$的闭包点，集合 S 必须与$\mathcal{B}$中的每个 B 相交．根据引理 13，我们必须有 $S\in\mathcal{B}$．X 的拓扑基$\mathcal{N}$中每个包含 x 的集合就是这种形式集合的有限交集，根据引理 13 它必须属于$\mathcal{B}$．令 F 为属于$\mathcal{B}$的闭集，那么 F 与每个使得 $x\in N$ 的 $N\in\mathcal{N}$相交．因此，x 是 F 的闭包点，因而属于 F．所以 x 属于$\mathfrak{A}$中的每个集，$\mathfrak{A}$具有非空交．■

习题

13. $\mathbf{R}^n$的每个闭有界集是紧的．
14. 不用选择公理证明，若 X 紧且 I 是闭区间，则 $X\times I$ 是紧的．[提示：令$\mathcal{U}$为 $X\times I$ 的开覆盖，且考虑使得对于每个 $t'<t$，集合 $X\times[0, t']$可被$\mathcal{U}$中有限个集合覆盖的最小 $t\in I$．用 X 的紧性证明 $X\times[0, t]$也可被$\mathcal{U}$中的有限个集合覆盖，且若 $t<1$，则对于某个 $t''>t$，$X\times[0, t'']$可被$\mathcal{U}$中的有限个集合覆盖．]
15. 证明可数个序列紧空间的积是序列紧的．[若$\langle x_n\rangle$是乘积中的序列，选取子序列$\langle x_n^1\rangle$，其

第一个坐标收敛，选取该序列的子序列$\langle x_n^2\rangle$其第二个坐标收敛，如此等等，则“对角的”序列$\langle x_n^n\rangle$在积空间收敛.]

16. 单位区间的乘积I^A称为(广义)立方体. 证明每个紧豪斯多夫空间X同胚于某个立方体的闭子集. [令$\mathcal{F}$为X上的连续实值函数簇，其函数值属于$[0, 1]$. 令$Q=\bigtimes_{f\in\mathcal{F}} I_f$. 那么$X$映上$Q$的将$x$映到其$f$重坐标是$f(x)$的点的映射$g$是一对一且连续的.] 198

17. 令$Q=I^A$为一个立方体，且令f为Q上的连续实值函数，那么，给定$\varepsilon>0$，存在一个Q上的连续实值函数g，使得$|f-g|<\varepsilon$且g仅有有限个坐标. [提示：用有限个长度为ε的区间覆盖f的值域，且考察这些区间的逆像.]

9.4 局部紧空间

对于拓扑空间X，若对每个$x\in X$存在一个包含x的开集O使得$\bar{O}$是紧的，我们称它为**局部紧的**. 因此X是局部紧的当且仅当具有紧闭包的开集簇构成X拓扑的一个基. 每个紧空间都是局部紧的，而欧几里得空间$\mathbf{R}^n$却是一个局部紧但非紧空间的例子.

局部紧豪斯多夫空间依然是最重要的拓扑空间之一，本节主要建立有关它们的一些基本性质. 本章后几节的主题是附加了其他假设的局部紧空间行为，第 13 章则进一步讨论有关这些拓扑空间的命题. 在这几节中我们始终假定X是局部紧与豪斯多夫的.[⊖]

以下命题提供了局部紧豪斯多夫空间的有用性质. 我们首先断言X上存在足够多的实值函数，它的证明留给读者(习题 18 与 19).

15. 命题　令K为局部紧豪斯多夫空间X的紧子集，那么存在一个包含K的开集O满足$\bar{O}$紧. 给定这样一个集合O，X上存在一个连续非负函数f，其在O外为零，在K上恒等于1. 若K也是一个G_δ，可以取在$\widetilde{K}$上$f<1$. 199

若f是拓扑空间上的实值函数，那么f的**支撑**是集合$\{x: f(x)\neq 0\}$的闭包. 因此

$$\text{support} f=\overline{\{x: f(x)\neq 0\}}.$$

对于X上的实值函数簇$\{\varphi_\alpha\}$和覆盖X的集簇$\{O_\lambda\}$，若每个φ_α的支撑都包含于某个O_λ，则说$\{\varphi_\alpha\}$**从属于**$\{O_\lambda\}$.

16. 命题　令$\{O_\lambda\}$为局部紧豪斯多夫空间X上的紧子集K的开覆盖，那么存在从属于$\{O_\lambda\}$的连续非负实值函数的有限簇$\{\varphi_1, \cdots, \varphi_n\}$，使得在$K$上

$$\varphi_1+\varphi_2+\cdots+\varphi_n\equiv 1.$$

证明　令O为满足$K\subset O$的开集，且$\bar{O}$紧. 对于每个$x_0\in K$，存在一个连续实值函数f_{x_0}满足$f_{x_0}(x_0)=1$，$0\leqslant f_{x_0}\leqslant 1$且对于某个$\lambda$，support $f_{x_0}\subset O\cap O_\lambda$. 对于每个$x_0\in\bar{O}\sim K$，令$g_{x_0}$为满足$g_{x_0}(x_0)=1$，$0\leqslant g_{x_0}\leqslant 1$，且 support $g_{x_0}\subset\sim K$的连续实值函数. 根据$\bar{O}$的紧性，我们可以从这些函数中选取有限个$f_1, \cdots, f_n, g_1, \cdots, g_m$，使得这些函数在其上取正值的集合覆盖$\bar{O}$. 设

$$f=\sum_{i=1}^{n} f_i$$

⊖ 豪斯多夫分离公理与紧性的组合是如此有用，以至于法国人(沿袭自布尔巴基)沿用术语“紧空间”来表示那些紧且豪斯多夫的空间，而用术语“伪紧”表示那些非豪斯多夫的紧空间.

$$g=\sum_{j=1}^{m}g_j.$$

那么在 K 上 $f>0$，support $f\subset O$，在 $\bar{O}$ 上 $f+g>0$，且在 K 上 $g\equiv 0$. 因此 $f/(f+g)$ 连续且在 K 上 $\equiv 1$. 所以取 $\varphi_i=f_i/(f+g)$. ■

可以修改上面命题的证明，使得函数 φ_i 是满足某些限制条件的函数类，比如当 X 为可微流形时，它取为可微函数(见习题 25).

下一个命题是完备度量空间的贝尔定理的一个类比，其证明留给读者(见习题 26).

200

17. 命题 令 X 为局部紧空间且 $\{O_n\}$ 是可数稠密开集簇，那么 $\bigcap O_n$ 在 X 稠密.

因此每个局部紧空间关于它们自身是局部第二贝尔范畴，如同完备度量空间，贝尔范畴理论的多个定理都适用于局部紧豪斯多夫空间. 我们只叙述这样一个后面将用到的结果.

18. 命题 令 X 为局部紧空间. 若 O 是一个包含于闭集的可数并集 $\bigcup F_n$ 的开子集，那么它们内部的并集 $\bigcup F^\circ_n$ 是一个稠密于 O 的开集.

以下命题和系刻画了局部紧空间中那些自身是局部紧的子集，其证明留给读者.

19. 命题 令 Y 为豪斯多夫空间 X 的稠密子集，且假定 Y 的子空间拓扑是局部紧的，那么 Y 是 X 的一个开子集.

20. 系 局部紧豪斯多夫空间 X 的子集 Y 在其子空间拓扑是局部紧的当且仅当 Y 是一个相对于 $\bar{Y}$ 的开子集.

若 X 是局部紧豪斯多夫空间，可以构造一个新空间 X^* 如下：添加一个不属于 X 的单点 ω 到 X，且取 X 的开子集或 X 紧子集的补为 X^* 的开集. 那么 X^* 是紧豪斯多夫空间，且 X 到 X^* 的恒同映射是 X 与 $X^*\sim\{\omega\}$ 之间的同胚. 空间 X^* 称为 X 的**亚历山德罗夫单点紧化**，且 ω 常常称为 X^* 的无穷远点.

从一个拓扑空间 X 到一个拓扑空间 Y 的连续映射 f 称为适当的，若对于每个紧集 $K\subset Y$，$f^{-1}[K]$ 是一个紧集. 从一个局部紧豪斯多夫空间 X 到局部紧豪斯多夫空间 Y 的适当映射，恰好是那些可通过将 X^* 的无穷远点映到 Y^* 的无穷远点，而被延拓为 X^* 到 Y^* 的连续映射 f^* 的 X 到 Y 的连续映射.

习题

201

18. 令 X 为局部紧空间，K 是它的紧子集. 证明存在开集 $O\supset K$ 使得 $\bar{O}$ 是紧的. [提示：对于每个 $x\in K$，存在一个包含 x 的 O_x 使得 $\bar{O}_x$ 紧. 令 O 为覆盖 K 的这些 O_x 的有限并集.]
19. a. 令 X 为局部紧豪斯多夫空间，且 K 是一个紧子集，那么 X 上存在一个连续实值函数在 K 上恒等于 1，而且集合 $O=\{x: f(x)\neq 0\}$ 有紧的闭包. [提示：用习题 16、乌雷松引理和命题 8.3.]

    b. 证明命题 15.
20. a. 令 X^* 为 X 的亚历山德罗夫单点紧化. 证明 X^* 中那些 X 的开子集或紧子集的补集构成 X^* 的拓扑，即两个这样集合的交集和任意这样集簇的并集仍然是一个这样的集合.

    b. 证明 X 到子空间 $X^*\sim\{\omega\}$ 的恒同映射是同胚的.

    c. 证明 X^* 是紧的且是豪斯多夫的.

21. a. 证明 $\mathbf{R}^n$ 的亚历山德罗夫单点紧化同胚于 $\mathbf{R}^{n+1}$ 的一个球面边界.
    b. 证明习题 11 中空间 X 的单点紧化是习题 12 中的空间 Y.
22. a. 令 O 为紧豪斯多夫空间的开子集，那么 O 局部紧.
    b. 令 O 为紧豪斯多夫空间 X 的开集，那么 X 到 O 的单点紧化的映射在 O 上恒同，且将 $X \sim O$ 的每一点映到 ω 的映射是连续的.
23. 令 X 和 Y 为局部紧豪斯多夫空间，f 是一个从 X 到 Y 的连续映射，令 X^* 和 Y^* 分别为 X 和 Y 的单点紧化，且 f^* 是从 X^* 到 Y^* 的映射，其限制于 X 为 f，并将 X^* 的无穷远点映到 Y^* 的无穷远点，那么 f 是适当的当且仅当 f^* 连续.
24. a. 令 X 为局部紧空间. X 的一个子集 F 是闭的当且仅当对于每个闭紧集 K，$F \cap K$ 是闭的.
    b. 若 X 是满足第一可数性公理而非局部紧的豪斯多夫空间时，以上结论正确.
25. 令 $\mathcal{F}$ 为局部紧豪斯多夫空间 X 上的实值连续函数族，且假定 $\mathcal{F}$ 有以下性质：
    i. 若 $f \in \mathcal{F}$ 且 $g \in \mathcal{F}$，则 $f+g \in \mathcal{F}$.
    ii. 若 $f \in \mathcal{F}$ 且 $g \in \mathcal{F}$，则 $f/g \in \mathcal{F}$，假定 support $f \subset \{x \in X: g(x) \neq 0\}$.　[202]
    iii. 给定一个开集 $O \subset X$ 与 $x_0 \in O$，存在 $f \in \mathcal{F}$ 满足 $f(x_0)=1$，$0 \leqslant f \leqslant 1$，且 support $f \subset O$.
    证明若要求 φ_i 属于 $\mathcal{F}$，命题 16 的结论仍然成立.
26. 证明命题 17. [提示：利用贝尔定理的证明，其中用有限交性质代替 X 的完备性.]
27. 证明命题 18.
28. 证明命题 19.
29. a. 证明局部紧空间的闭子集局部紧.
    b. 证明局部紧豪斯多夫空间的开子集是局部紧的.
    c. 证明系 20. [提示：Y 在 $\bar{Y}$ 稠密.]

9.5 σ 紧空间

若拓扑空间 X 是可数紧集簇的并，则称它为 **σ 紧**. 在局部紧的前提下，有一些其他性质与 σ 紧等价.

21. 定理　*令 X 为局部紧豪斯多夫空间，那么以下命题等价：*

i. X 是林德勒夫.

ii. X 是 σ 紧.

iii. 存在开集序列 $\langle O_n \rangle$ 满足 $\bar{O}_n$ 紧，$\bar{O}_n \subset O_{n+1}$ 且 $X = \bigcup O_n$.

iv. 存在适当的连续映射 φ: $X \to (0, \infty)$.

证明　为证明(i)蕴涵(ii)，易见 X 被闭包为紧的开集覆盖. 若 X 是林德勒夫的，我们有一个可数子覆盖 $\{U_n\}$，这就得到 $X = \bigcup \bar{U}_n$.

(ii)⇒(iii)：令 $X = \bigcup K_n$，其中 K_n 紧，令 O_1 为满足 $\bar{O}_1$ 紧的开集且 $K_1 \subset O_1$，通过令 O_n 为满足 $\bar{O}_n$ 紧并且包含紧集 $K_n \cup \bar{O}_{n-1}$ 的开集，递推地定义序列 $\langle O_n \rangle$，那么 $\langle O_n \rangle$ 就是符合要求的

[203] 序列.

(iii)⇒(iv)：令 φ_n 为满足在 $\bar{O}_{n-1}$，$\varphi_n \equiv 1$ 且 support$\varphi_n \subset O_n$ 的连续实值函数. 令

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty}(1-\varphi_n).$$

那么 φ 是一个从 X 到 $[0, \infty)$ 的适当连续映射.

(iv)⇒(i)：令 φ 为从 X 到 $[0, \infty)$ 的适当映射，那么 $X=\bigcup K_n$，其中 $K_n=\varphi^{-1}[[0, n]]$. 由于 φ 是适当的，因此 K_n 紧. X 的每个开覆盖 $\mathfrak{U}$ 有一个覆盖 K_n 的有限子簇 $\mathfrak{U}_n$，那么 $\mathfrak{U}=\bigcup \mathfrak{U}_n$ 是 X 的一个可数子覆盖. ■

满足性质(iii)的序列 $\langle O_n \rangle$ 称为 X 的一个穷举.

习题

30. 证明在定理 21 的证明中所构造的函数 φ 连续且适当.
31. 对于局部紧度量空间 (X, ρ)，若对于某个 x_0 和所有 $a\in(0, \infty)$，闭球体 $\{x: \rho(x, x_0)\leqslant a\}$ 是紧的，我们说它是适当的或有一个**适当的度量**.
    a. 令 (X, ρ) 为适当的局部紧度量空间，那么一个子集 K 是紧的当且仅当它既闭又有界.
    b. 每个适当的局部紧度量空间是 σ 紧.
    c. 每个 σ 紧且局部紧的度量空间 (X, ρ) 有一个适当的等价度量 ρ^*. [提示：尝试 $\rho^*(x, y)=\rho(x, y)+|\varphi(x)-\varphi(y)|$，其中 φ 是 X 上适当的实值函数.]

*9.6 仿紧空间

我们说拓扑空间 X 的子集簇 $\mathcal{C}$ 是**局部有限**的，若每个 $x\in X$ 有邻域 U，且其仅与 $\mathcal{C}$ 的有限个集合相交. 以下引理，其证明留给读者，在讨论局部有限簇时很有用，它们表明这样的簇具有一些有限簇的性质.

[204] **22. 引理** *令 $\{E_\lambda\}$ 为拓扑空间 X 的子集的局部有限簇，且令 $E=\bigcup E_\lambda$，那么 $\bar{E}=\bigcup \bar{E}_\lambda$.*

23. 引理 *令 $\{E_\lambda\}$ 为拓扑空间 X 的子集的局部有限簇，且 K 是 X 的紧子集，那么 K 仅与 $\{E_\lambda\}$ 中的有限个集合相交.*

一个拓扑空间 X 称为**仿紧**，若 X 的每个开覆盖有一个局部有限开加细.

斯通的一个著名定理曾断言每个度量空间都是仿紧的，有兴趣的读者可参考 Mary Ellen Rudin[26]的一个合理的简短证明. 本节我们在局部紧豪斯多夫拓扑空间建立仿紧性与一些其他性质之间的等价性.

在开覆盖的情形，一个有时会与局部有限相混淆的概念是星形有限：X 的一个子集簇 $\{E_\lambda\}$ 称为**星形有限的**，若每个 E_λ 仅与该簇的有限个其他元素相交. 一个星形有限的开集簇是局部有限的. 但是下面的例子表明，反过来不一定成立，令 $O_n=(n, \infty)$，$n\geqslant 0$，这个开集簇是 $[1, \infty)$ 的局部有限覆盖，但不是星形有限的.

24. 命题 *σ 紧的局部紧空间是仿紧的.*

证明 令 $\mathfrak{U}$ 为 X 的开覆盖，且令 $\langle O_n \rangle$ 为定理 21 的(iii)所给出的 X 的穷举. 令 $\mathfrak{U}_n$ 为形如 $U\cap(O_{n+1}\sim\bar{O}_{n-2})$ 的集簇，那么每个 $\mathfrak{U}_n$ 是 $\mathfrak{U}$ 的加细且 $\mathfrak{U}_n$ 覆盖紧集 $K_n=\bar{O}_n\sim O_{n-1}$. 因此存在一

个覆盖 K_n 的有限子覆盖 $\mathcal{U}_n^*$. 由于 $X=\bigcup K_n$，此簇 $\mathcal{V}=\bigcup\mathcal{U}_n^*$ 覆盖 X 且是 $\mathcal{U}$ 的加细. 所以对于某个 n，每个 $x\in X$ 属于开集 $O_n\sim\bar{O}_{n-2}$，但这个开集仅能与集簇 $\mathcal{U}_k^*$ 中的 4 个相交. 由于每个 $\mathcal{U}_k^*$ 都是有限的，$O_n\sim\bar{O}_{n-2}$ 仅可与 $\mathcal{V}$ 的有限个集合相交. 这就表明 $\mathcal{V}$ 是局部有限的. ■

25. 命题　*令 X 为局部紧豪斯多夫空间，那么以下陈述等价：*

i. X 是仿紧的.

ii. X 的每个开覆盖有星形有限开加细.

iii. X 是 σ 紧空间的直并.

证明　显然，(ii)⇒(i). 反之，令 $\mathcal{U}$ 为覆盖 X 的开覆盖. 由于 X 是局部紧的，$\mathcal{U}$ 有一个由紧闭包的开集所组成的加细. 根据仿紧性，这个覆盖有一个局部有限加细 $\mathcal{V}$. 由于 $\mathcal{V}$ 的每个成员有紧闭包，它仅能与 $\mathcal{V}$ 的有限个其他元素相交，因此 $\mathcal{V}$ 星形有限. [205]

由于每个 σ 紧局部紧空间是仿紧的，且仿紧空间的直接并是仿紧的，所以有(iii)⇒(ii)⇒(i).

因此接下来仅需证明(ii)⇒(iii). 为此，令 $\mathcal{U}$ 为具有紧闭包的开集 X 的星形有限覆盖. 若 $\mathcal{U}$ 中存在一个集合的有限链 U_0，…，U_n，使得 $x\in U_0$，$U_k\cap U_{k+1}\neq\varnothing$ 且 $y\in U_n$，设 $x\equiv y$ 来定义 X 的等价关系，令 $\{X_\alpha\}$ 为 X 关于 $\equiv$ 所分解成的等价类，那么 $X=\bigcup X_\alpha$，且这是一个不相交集合的并集. 给定 $x\in X$，令 V_n 为那些可用 $\mathcal{U}$ 中的 $n+1$ 个或更少元素的链与 x 连通的 $y\in X$ 所组成的集合，那么每个 V_n 是开的，且因为 $\mathcal{U}$ 星形有限，每个 V_n 是 $\mathcal{U}$ 的有限个元素的并. 也有 $\bar{V}_n\subset V_{n+1}$. 因此包含 x 的等价类是 $\bigcup V_n$，因此是 σ 紧开集. 所以 X 是 σ 紧集的直并. ■

26. 系　*一个连通仿紧和局部紧空间是 σ 紧的.*

证明　若仅存在一个直接被加元，那么直并只能是连通的. ■

习题

32. 证明引理 22.

33. 证明引理 23.

34. a. 证明仿紧的豪斯多夫空间是正则的. [提示：用引理 22 来改变习题 3 的证明.]

 b. 证明仿紧豪斯多夫空间是正规的.

35. 局部紧度量空间的一个扩充度量 ρ 称为适当的：对于每个 $x_0\in X$ 和每个 $a\in(0,\infty)$，集合 $\{x: \rho(x, x_0)\leqslant a\}$ 是紧的. 证明一个局部紧度量空间仿紧当且仅当它可被一个适当的扩充度量所度量化.

9.7　流形

谈到 n 维**流形**，我们指的是连通的豪斯多夫空间 M，该空间的每点有一个同胚于 $\mathbf{R}^n$ 中球的邻域. 有时也将此表达为说流形是一个连通的局部欧几里得的豪斯多夫空间. 根据定义，一个流形具有欧几里得空间的所有局部性质. 特别地，它是局部紧与局部连通的. [206]

每个同胚于球的邻域称为一个坐标邻域或一个坐标球. 由坐标球 U 和 U 映上 $\mathbf{R}^n$ 的球的同胚 φ 所组成的一个对 $\langle U, \varphi\rangle$ 称为一个坐标图，φ 称为一个坐标映射. 点 $x\in U$(在 $\mathbf{R}^n$)在 φ 的坐标称为 x 在这个图的坐标.

以下定理给出了流形的几个等价性质.

27. 定理 令 M 为流形，那么以下陈述等价：

i. M 仿紧.

ii. M σ 紧.

iii. M 是林德勒夫.

iv. M 的每个开覆盖有一个星形有限加细.

v. M 存在一个开子集序列 $\langle O_n \rangle$ 满足 $\bar{O}_n$ 紧，$\bar{O}_n \subset O_{n+1}$ 且 $M = \bigcup O_n$.

vi. 存在一个适当的连续映射 φ：$M \to [0, \infty)$.

vii. M 第二可数.

证明 由于 M 是连通与豪斯多夫的，定理 21、25 和系 26 蕴涵前 6 个条件等价. 对于任意拓扑空间，(vii)蕴涵(iii). 另一方面，假设 M 是林德勒夫，那么 M 可被可数个坐标球覆盖，且每个坐标球具有可数基，这些基的并是 M 的可数基，因此对于流形，(iii)蕴涵(vii). ■

所以流形可分为三类：紧流形；满足定理 27 的一个条件，从而满足其所有条件的非紧流形；不满足定理 27 的任何一个条件的流形. 前两类流形习惯上称为仿紧流形.

207 谈到流形 M 的图册，我们指的是使得 $\{U_\alpha\}$ 覆盖 M 的坐标图簇 $\{\langle U_\alpha, \varphi_\alpha \rangle\}$. M 的一个图册称为可微图册，若只要 $U_\alpha \cap U_\beta \neq 0$，每个映射 $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ 是 $\varphi_\beta[U_\alpha \cap U_\beta]$ 到 $\mathbf{R}^n$ 的可微映射.

令 M 为具有可微图册 $\mathfrak{A}$ 的 m 维流形，N 为具有可微图册 $\mathcal{B}$ 的 n 维流形. 从 M 到 N 的映射 f 说为是从 $\langle M, \mathfrak{A} \rangle$ 到 $\langle M, \mathcal{B} \rangle$ 的可微映射：若对于每个 $\langle U_\alpha, \varphi_\alpha \rangle \in \mathfrak{A}$ 和 $\langle V_\beta, \psi_\beta \rangle \in \mathcal{B}$ $\psi_\beta \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1}$ 是集合 $\varphi_\alpha[U_\alpha \cap f^{-1}[V_\beta]]$ 上的可微映射. 对于流形 M 的两个可微图册 $\mathfrak{A}$ 与 $\mathcal{B}$，若从 $\langle M, \mathfrak{A} \rangle$ 到 $\langle M, \mathcal{B} \rangle$ 与从 $\langle M, \mathcal{B} \rangle$ 到 $\langle M, \mathfrak{A} \rangle$ 的恒同映射是可微映射，我们称这两个可微图册等价. 谈到 M 上的可微结构，我们指的是可微图册的等价类，且称一个具有可微结构的流形为可微流形. 因此当给出一个 M 的可微图册时，就给出了一个流形 M 的可微结构. 而从一个可微流形到另一个可微流形的可微映射概念仅仅依赖于它们之上的可微结构，却与给出该结构的特定图册无关.

在可微流形的情形，定理 27(vi)中的函数 φ 可取为可微的.

习题

36. 令 $X = (-1, 1) \cup [2, 3)$. 通过取所有开区间 $(a, b) \subset X$ 和所有形如 $(-\varepsilon, 0) \cup [2, 2+\varepsilon]$，$0 < \varepsilon < 1$ 的集合为基使 X 成为一个拓扑空间. 证明 X 是一个非豪斯多夫的局部欧几里得空间.

37. 有些作者不要求流形连通，那我们就称这些广义流形为不必连通流形.

    a. 证明每个不必连通流形是(连通)流形的直并.

    b. 修改定理 27 的陈述以描述不必连通流形的情形.

38. 穆尔流形. 令 X 为其元素是开右半平面 (即 $\{\langle x, y \rangle : x > 0\}$) 的点和具有非负斜率的直线所构成的集合. 直线 l 的斜率和 y 截距分别写为 $m(l)$ 和 $b(l)$. 我们取半平面的开圆盘和集合

$$V_\varepsilon = \{l : |m(l) - m_0| < \varepsilon, b(l) = b_0\} \cup \{\langle x, y \rangle : |(y - b_0)/x \pm m_0| < \varepsilon, x < \varepsilon\}.$$

208 定义为 X 的拓扑基.

a. 证明 X 是连通豪斯多夫空间，且 X 的每一点都包含于同胚于 $\mathbf{R}^2$ 开子集的开集．(这样的空间称为二维流形或曲面)．

b. 证明 X(或任何流形)是局部紧的、完全正则且满足第一可数公理．

c. 证明 X 有可数稠密子集，但不满足第二可数公理．

d. 证明 X 是非正规的．

*9.8　斯通-切赫紧化

令 X 为完备正则拓扑空间，$\mathcal{F}$ 为 X 上满足 $|f|\leqslant 1$ 的连续实值函数 f 所组成的族．若我们令 $I=[-1, 1]$，那么根据习题 8.48，X 同胚于集合 $E\subset I^{\mathcal{F}}$．令 $F=\bar{E}$．由于 $I^{\mathcal{F}}$ 是紧豪斯多夫空间，那么集合 F 是紧豪斯多夫空间．若将 X 与 E 视为等同，我们有 X 是 F 的一个稠密开子集．空间 F 称为 X 的斯通-切赫紧化，记为 $\beta(X)$．我们用以下命题来概括它的一些性质．

28. 命题　*令 X 为完备正则拓扑空间，那么存在惟一的紧豪斯多夫空间 $\beta(X)$，它满足以下性质：*

i. 空间 X 是 $\beta(X)$ 的一个稠密子集．

ii. X 上每个有界连续实值函数可延拓为 $\beta(X)$ 上的一个连续函数．

iii. 若 X 是紧豪斯多夫空间 Y 的稠密开子集，则惟一存在将 $\beta(X)$ 映上 Y 的连续映射 φ，使得对所有 $x\in X$，$\varphi(x)=x$．

若 X 局部紧，那么 X 是 $\beta(X)$ 的一个开子集．

习题

39. 证明命题 28：

  a. 若 f 是 X 上的有界连续实值函数，且满足 $|f|\leqslant 1$，则 f 是 π_f 在 X 的限制，且 π_f 在 $\beta(X)$ 上连续．

  b. 用 Y 是 I^G 的子集这一事实证明(iii)．这里 G 是 Y 上满足 $|g|\leqslant 1$ 的连续函数 g 所组成的空间．

  c. 证明 $\beta(X)$ 在以下意义是惟一的：若 Z 是另一个具有相同性质的空间，则存在一个 $\beta(X)$ 与 Z 的同胚 φ，使得对所有的 $x\in X$，$\varphi(x)=x$．

40. 令 X 和 Y 为习题 11 和 12 中所出现的空间．证明 $\beta(X)=Y$．

41. 令 $\mathbf{N}$ 为自然数集，讨论 $\beta(\mathbf{N})$．证明 $\mathbf{N}$ 的序列在 $\beta(\mathbf{N})$ 收敛当且仅当其在 $\mathbf{N}$ 收敛．因此 $\beta(\mathbf{N})$ 是紧的但非序列紧．

209

9.9　斯通-魏尔斯特拉斯定理

令 X 为紧豪斯多夫空间．我们用 $C(X)$ 表示 X 上的所有连续实值函数集合．由于 X 是正规的，根据乌雷松引理，$C(X)$ 存在足够多的函数分离点；即给定 X 上的两个不同点 x 与 y，我们能够找到 $C(X)$ 中的函数 f 使得 $f(x)\neq f(y)$．由于常数乘于连续实值函数得到的函数是连续的，且两个连续实值函数之和是连续的，所以集合 $C(X)$ 是线性空间．若我们定义 $\|f\|=\max|f(x)|$，$C(X)$ 就成为一个赋范线性空间．若我们设 $\rho(f, g)=\|f-g\|$，则 $C(X)$ 成为一个度

量空间．作为一个度量空间，$C(X)$是完备的．

空间$C(X)$也有一个环结构：$C(X)$中两个函数f和g的乘积fg仍然属于$C(X)$．$C(X)$的函数所构成的线性空间A称为一个**代数**，若A中两个元素的乘积仍然在A中．因此若对于A中任何两个函数f和g，以及任何实数a和b，我们有$af+bg$属于A与fg属于A，则A是一个代数．X上的一个函数族A称为分离点，若给定X的两个不同点x和y，存在一个A内的f使得$f(x)\neq f(y)$．本节我们研究$C(X)$的闭子代数，且证明若A是$C(X)$的一个子代数，且分离点，包含常值函数，是闭的，那么$A=C(X)$．

空间$C(X)$还有一个格结构：若f和g属于$C(X)$，则函数$(f\wedge g)(x)=\min[f(x), g(x)]$和函数$(f\vee g)(x)=\max[f(x), g(x)]$也属于$C(X)$．$C(X)$的子集$L$称为一个格，若对于每对属于$L$的函数$f$和$g$，也有$f\vee g$和$f\wedge g$属于$L$．通过先研究函数的格再来讨论$C(X)$的子代数是很方便的．以下命题可认为是迪尼定理的一个推广：

[210]

29. 命题 令L为紧空间X上的连续实值函数格，且假定如下定义的函数h

$$h(x)=\inf_{f\in L}f(x)$$

是连续的，那么，给定$\varepsilon>0$，存在属于L的g使得对于所有属于X的x，$0\leqslant g(x)-h(x)<\varepsilon$．

证明 对每个属于X的x，存在一个属于L的函数f_x，使得$f_x(x)<h(x)+\varepsilon/3$．由于$f_x$和$h$是连续的，存在一个包含$x$的开集$O_x$使得

$$|f_x(y)-f_x(x)|<\frac{\varepsilon}{3} \quad 以及 \quad |h(y)-h(x)|<\frac{\varepsilon}{3}$$

对所有$y\in O_x$成立．因此对于所有$y\in O_x$，$f_x(y)-h(y)<\varepsilon$．现在集合O_x覆盖X，根据紧性，存在它们中的有限个集合，比如说$\{O_{x_1}, \cdots, O_{x_n}\}$覆盖$X$．令$g=f_{x_1}\wedge f_{x_2}\wedge\cdots\wedge f_{x_n}$，那么$g\in L$，且给定$y\in X$我们可以选择$i$使得$y\in O_{x_i}$，这就得到

$$g(y)-h(y)\leqslant f_{x_i}(y)-h(y)<\varepsilon.$$

■

30. 定理 令X为紧空间，L为满足下列性质的X上的连续实值函数格：

i. L分离点；即若$x\neq y$，存在一个$f\in L$使得$f(x)\neq f(y)$．

ii. 若$f\in L$，且c是一个任意实数，则cf和$c+f$也属于L．

那么给定X上任意连续实值函数h和任意$\varepsilon>0$，存在函数$g\in L$使得对所有$x\in X$，

$$0\leqslant g(x)-h(x)<\varepsilon.$$

在证明命题之前，我们首先建立两个引理．

31. 引理 令L为紧空间X上的实值函数族，且满足命题30的性质(i)和(ii)，那么给定任何两个实数a和b，以及由X的不同点所组成的对x和y，存在一个$f\in L$使得$f(x)=a$、$f(y)=b$．

证明 令g为L中的函数使得$g(x)\neq g(y)$．令

[211]

$$f=\frac{a-b}{g(x)-g(y)}g+\frac{bg(x)-ag(y)}{g(x)-g(y)}.$$

那么根据性质(ii)，$f\in L$且$f(x)=a$，$f(y)=b$． ■

32. 引理 令L为命题30给出的L，令a和b为满足$a\leqslant b$的实数，F是X的一个闭子集，p为不在F中的点，那么存在L的函数f使得$f\geqslant a$，$f(p)=a$且对于所有$x\in F$，$f(x)>b$．

证明 根据引理31，对于每个$x\in F$我们可以选择，函数f_x使得$f_x(p)=a$且$f_x(x)=b+1$．

令 $O_x=\{y: f_x(y)>b\}$，那么集合 $\{O_x\}$ 覆盖 F，且由于 F 是紧的，存在有限个 $\{O_{x_1}, \cdots, O_{x_n}\}$ 覆盖 F. 令 $f=f_{x_1}\vee\cdots\vee f_{x_n}$，那么 $f\in L$，$f(p)=a$，在 F 上 $f>b$. 若用 $f\vee a$ 代替 f，也有在 X 上 $f\geqslant a$. ■

命题 30 的证明　由于 L 非空，根据(ii)常值函数属于 L. 给定 $g\in C(X)$，令 $L'=\{f: f\in L$ 且 $f\geqslant g\}$. 若能证明对于每个 $p\in X$，我们有 $g(p)=\inf f(p)$，$f\in L'$ 那么命题 30 即可由命题 29 得到. 选取一个正实数 η. 由于 g 是连续的，集合

$$F=\{x: g(x)\geqslant g(p)+\eta\}$$

是闭的. 由于 X 是紧的，g 在 X 上有界，比如说它以 M 为界. 根据引理 32，我们可以找到一个函数 $f\in L$，使得 $f\geqslant g(p)+\eta$，$f(p)=g(p)+\eta$，且在 F 上 $f(x)>M$. 因为在 $\widetilde{F}$ 上 $g<g(p)+\eta$，所以有在 X 上 $g<f$. 因此 $f\in L'$，且 $f(p)\leqslant g(p)+\eta$. 而 η 是任意的正数，我们有 $g(p)=\inf f(p), f\in L'$. ■

33. 引理　*给定 $\varepsilon>0$，存在一个单变量多项式 P，使得对于所有 $s\in[-1, 1]$ 有 $|P(s)-|s||<\varepsilon$.*

证明　令 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n t^n$ 为 $(1-t)^{1/2}$ 二项展开所得到的级数，该级数在区间 $[0,1]$ 关于 t 一致收敛. 因此，给定 $\varepsilon>0$，我们可选取 N 使得对于所有 $t\in[0,1]$，有

$$|(1-t)^{1/2}-Q_N(t)|<\varepsilon,$$

其中 $Q_N=\sum\limits_{n=0}^{N}c_n t^n$. 令 $P(s)=Q_N(1-s^2)$，那么 P 是 s 的一个多项式，且对于 $s\in[-1, 1]$，$||s|-P(s)|<\varepsilon$. ■

[212]

34. 定理（斯通-魏尔斯特拉斯）　*令 X 为紧空间，A 是 X 上分离 X 的点且包含常值函数的连续实值函数所构成的代数，那么给定 X 上任意连续实值函数 f 和任意 $\varepsilon>0$，存在 A 中的函数 g，使得对于所有属于 X 的 x，有 $|g(x)-f(x)|<\varepsilon$. 换言之，A 是 $C(X)$ 的一个稠密子集.*

证明　令 $\overline{A}$ 表示 A 作为 $C(X)$ 子集的闭包，因此 $\overline{A}$ 由定义在 X 上且为 A 中函数序列一致极限的那些函数组成，容易证明 $\overline{A}$ 本身就是 X 上连续实值函数的代数. 该定理等价于说 $\overline{A}=C(X)$. 若我们能证明 $\overline{A}$ 是一个格点，则这个结论可由命题 30 得到. 令 $f\in\overline{A}$ 且 $\|f\|\leqslant 1$，那么给定 $\varepsilon>0$，$\||f|-P(f)\|<\varepsilon$，其中 P 是由引理 33 所给出的多项式. 由于 $\overline{A}$ 是一个包含常数的代数，$P(f)\in\overline{A}$，且由于 $\overline{A}$ 是 $C(X)$ 的闭子集，我们有 $|f|\in A$. 若现在 f 是 A 中的任意函数，则 $f/\|f\|$ 的范数为 1，因而 $f/\|f\|$ 属于 $\overline{A}$，因此 $|f|$ 也属于 $\overline{A}$. 所以 $\overline{A}$ 包含 $\overline{A}$ 中每个函数的绝对值. 但

$$f\vee g=\frac{1}{2}(f+g)+\frac{1}{2}|f-g|$$

且

$$f\wedge g=\frac{1}{2}(f+g)-\frac{1}{2}|f-g|.$$

因此 $\overline{A}$ 是一个格点且根据命题 30 它必须是 $C(X)$. ■

35. 系　*在 $\mathbf{R}^n$ 中，闭有界集合 X 上的每个连续函数可被多项式(坐标)一致逼近.*

证明　坐标函数中所有多项式的集合是一个包含常数的代数．由于坐标函数对所给 $\mathbf{R}^n$ 中的不同点取不同的值，所以它分离点，因此定理 34 适用．■

习题

42．令 f 为 $\mathbf{R}$ 上周期为 2π 的连续实值函数；即 $f(x+2\pi)=f(x)$．证明，给定 $\varepsilon>0$，存在一个如下给出的有限傅立叶级数 φ，$\varphi(x)=a_0+\sum_{n=1}^{N}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$，使得对于所有的 x，$|\varphi(x)-f(x)|<\varepsilon$．[提示：注意周期函数实际上就是定义在单位圆周上的函数，且 $\cos mx\cos nx=\frac{1}{2}\{\cos(m+n)x-\cos(m-n)x\}$，等等．]

213

43．令 A 为紧空间 X 上连续实值函数构成的代数，且假设 A 分离 X 中的点，那么或者 $\bar{A}=C(X)$，或者存在一点 $p\in X$ 且 $\bar{A}=\{f: f\in C(X), f(p)=0\}$．[提示：若 $1\in\bar{A}$，我们已完成证明．若 $\exists f\in A$，其无处等于零，那么 $1\in\bar{A}$．若对于每个 $x\in X$，存在一个 $f\in A$ 满足 $f(x)\neq 0$，那么 $\exists g\in A$ 满足 $g>0$ 处处成立．]

44．令 $\mathcal{F}$ 为紧豪斯多夫空间 X 上的实值连续函数族，且假定 $\mathcal{F}$ 分离 X 中的点，那么 X 上每个连续实值函数可被 $\mathcal{F}$ 的有限个函数的多项式一致逼近．

45．a．令 X 为拓扑空间，A 为 X 上的实值连续函数集合．若对于所有 $f\in A$，$f(x)=f(y)$，则定义 $x\equiv y$．证明 $\equiv$ 是一个等价关系．

b．令 $\tilde{X}$ 为 $\equiv$ 的等价类集合，且 φ 是 X 到 $\tilde{X}$ 的自然映射．证明对于每个 $f\in A$，惟一存在 $\tilde{X}$ 上的实值函数 $\tilde{f}$ 使得 $f=\tilde{f}\circ\varphi$．

c．令 $\tilde{X}$ 具有由这些 $\tilde{f}$ 所生成的弱拓扑，那么 φ 是连续的．

d．若 X 紧的，则 $\tilde{X}$ 也是紧的，且(b)中的函数 $\tilde{f}$ 是连续的．

e．令 X 为紧空间，且 A 为 $C(X)$ 中包含常值函数的闭子代数，那么存在紧豪斯多夫空间 $\tilde{X}$ 和一个 X 映上 $\tilde{X}$ 的映射 φ，使得 A 是形如 $\tilde{f}\circ\varphi$ 的所有函数 f 的集合，其中 $\tilde{f}\in C(\tilde{X})$．

46．令 X 和 Y 为紧空间，那么对于 $X\times Y$ 上每个连续实值函数 f 和每个 $\varepsilon>0$，我们能找到 X 上的连续实值函数 $g_1,\cdots,g_n$ 和 Y 上的连续实值函数 $h_1,\cdots,h_n$，使得对于每个 $\langle x,y\rangle\in X\times Y$，有

$$\left|f(x,y)-\sum_{i=1}^{n}g_i(x)h_i(y)\right|<\varepsilon.$$

47．魏尔斯特拉斯定理说的是定义在 $\mathbf{R}^n$ 立方体上的连续函数可被多项式一致逼近，该定理可被逼近多项式的积分公式直接证明[⊖]．通过证明代数 $\mathfrak{a}$ 内范数为 1 的函数给出了 X 到无穷维立方体 $\times\{I_f: f\in\mathfrak{a}, \|f\|=1\}$ 的映射，证明这个特殊情形蕴涵一般的斯通-魏尔斯特拉斯定理．用铁策扩张定理和习题 17 证明，每个 X 像上的连续函数可被(有限个)坐标函数的多项式逼近．

214

斯通-魏尔斯特拉斯定理给出了关于连续函数的代数逼近的精确信息．一个自然的问题是可被连续实值函数环逼近的函数性质，也就是说，若不再规定是否可乘任意实数．以下三

⊖ 例如，见 R. Courant and D. Hilbert, *Mathematische Physik*, Bd. I(Berlin: Springer-Verlag, 1931), 55-57 页.

个习题是有关于此的一些结果.

48. 令 I 为 $\mathbf{R}$ 内的区间$[-1, 1]$，f 是 I 上的连续实值函数，使得 $f(-1)$、$f(0)$和 $f(1)$是整数，且 $f(1)\equiv f(-1)\bmod 2$，那么给定 $\varepsilon>0$，存在具有整系数的多项式 P 使得对于所有 $x\in I$，有 $|f(x)-P(x)|<\varepsilon$. 提示：
   a. 令 φ 为如下定义的多项式 $\varphi(x)=x+x(1-2x)(1-x)$，那么 φ 是一个单调递增函数，其不动点是 0，$\frac{1}{2}$和 1.
   b. 选取 $\varepsilon>0$，那么 φ 的某个迭带 φ_n是一个具有整系数，且在$[0, 1]$上单调递增的多项式，且使得对于 $x\in[\varepsilon, 1-\varepsilon]$，$|\varphi_n(x)-\frac{1}{2}|<\varepsilon$.
   c. 给定一个实数 α，$0<\alpha<1$ 和任意 $\varepsilon>0$，那么存在具有整系数的多项式 ψ(且无常数项)，使得在$[0, 1]$ $0\leqslant\psi\leqslant 1$，且对于所有属于$[\varepsilon, 1-\varepsilon]$的 x，$|\psi(x)-\alpha|<\varepsilon$.
   d. 令 P 为具有整系数的多项式，且假定 $P(-1)=P(0)=P(1)=0$，令 β 为任意实数，那么对于每个 $\varepsilon>0$，在$[-1, 1]$上 βP 可被具有整系数且无常数项的多项式在误差不超过 ε 的范围内逼近.
   e. 将习题的陈述归结为(d)和斯通-魏尔斯特拉斯定理.

49. a. 令 X 为集合，R 为 X 上的实值函数环. 令 $\overline{R}$ 为那些可被 R 中函数一致逼近的所有实值函数环. 若 $f\in\overline{R}$，且 $\sup_X |f(x)|<1$，则对于每个实数 c，$cf\in\overline{R}$.
   b. 令 X 为紧豪斯多夫空间，R 是 X 上连续实值函数环使得 $1\in R$，且对于每个由不同的点 x 和 y 构成的点对，存在 R 中函数 $f(x)$使得 $f(x)\neq f(y)$，且对于所有 $z\in X$，$|f(z)|<1$，那么 X 上的每个连续实值函数可被 R 中的函数一致逼近.

50. a. 习题 48 的陈述可略加改进. 例如，我们可以取区间 I 为包含于$(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ 的任何闭区间[在 I 上，多项式 x^2-1 绝对值至多为 1. 运用习题 49b.]　215
   b. 证明不能取习题 48 的 I 为$[-2, 2]$.
   [提示：若 P 是具有整系数的多项式，则
$$\frac{1}{\pi}\int_{-2}^{2}P(x)(4-x^2)^{-1/2}\,dx$$
   是一个整数.]　216

第 10 章 巴拿赫空间

10.1 引言

我们将研究被同时赋予拓扑结构与代数结构的一类空间. 对于一个元素集合 X，若有一个 $X\times X$ 到 X 的函数“+”和一个由 $\mathbf{R}\times X$ 到 X 的函数“·”，并满足下述条件，我们称它为实数域上的**向量空间**(或线性空间、线性向量空间)：

i. $x+y=y+x$.

ii. $(x+y)+z=x+(y+z)$.

iii. 存在属于 X 的向量 θ 使得 $x+\theta=x$ 对于所有属于 X 的 x 成立.

iv. $\lambda(x+y)=\lambda x+\lambda y$；$\lambda\in\mathbf{R}$，$x$，$y\in X$.

v. $(\lambda+\mu)x=\lambda x+\mu x$；$\lambda$，$\mu\in\mathbf{R}$，$x\in X$.

vi. $\lambda(\mu x)=(\lambda\mu)x$；$\lambda$，$\mu\in\mathbf{R}$，$x\in X$.

vii. $0\cdot x=\theta$，$1\cdot x=x$.

我们称“+”为加法而称“·”为数乘. 应该注意(iii)中定义的元素 θ 是惟一的，这是因为若 θ' 也具有同样性质，则 $\theta=\theta+\theta'=\theta'+\theta=\theta'$. 元素 $(-1)x$ 称为 x 的负元素并写为 $-x$. 我们有

$$x+(-x)=1\cdot x+(-1)x=(1-1)x=0\cdot x=\theta.$$

定义在向量空间的非负实值函数 $\|\ \|$ 若满足以下条件，我们称它为一个**范数**：

i. $\|x\|=0\Leftrightarrow x=\theta$.

ii. $\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$.

217 iii. $\|\alpha x\|=|\alpha|\ \|x\|$.

对于一个赋范向量空间，若定义一个度量 ρ 为 $\rho(x,y)=\|x-y\|$，它就成为一个度量空间. 当谈到赋范空间的度量性质时，我们指的是这个度量.

若赋范向量空间在这个度量中是完备的，则称它为巴拿赫空间. 第 6 章中给出了巴拿赫空间的各种例子. 另一个例子是紧空间 X 上的全体实值连续函数构成的空间 $C(X)$. 这里我们重述命题 6.5，且注意到第 6 章给出的证明对任何赋范向量空间仍有效.

1. 命题 *一个赋范向量空间是完备的当且仅当每个绝对可求和序列是可求和的.*

向量空间 X 的非空子集 S 是一个**子空间或线性流形**，若只要 x_1 和 x_2 属于 S，$\lambda_1x_1+\lambda_2x_2$ 属于 S. 若 S 也是 X 的一个闭子集，则它称为一个闭线性流形. 任何线性流形族的交集是一个线性流形。因此，给定 X 中的一个集合 A，总存在包含 A 的一个最小线性流形，我们通常将这个流形记为 $\{A\}$.

若 A 是 X 的任意集合，我们用 $A+x$ 表示所有形如 $z=x+y$，$y\in A$ 的元素 z 的集合，那么集合 $A+x$ 称为 A 的 x 平移. 集合 λA 是所有形如 λx 的元素的集合，其中 $x\in A$，而 $A+B$ 是所有形如 $x+y$ 的元素的集合，其中 x 属于 A 而 y 属于 B.

习题

1. 证明若 $x_n\to x$，则 $\|x_n\|\to\|x\|$.

2. 两个范数 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 称为等价，若存在一个正常数 K 使得 $K^{-1}\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant K\|x\|_1$. 若两个范数等价，则由它们导出的度量一致等价. 证明习题 7.10b 中引入的关于 $\mathbf{R}^n$ 的度量是由关于 $\mathbf{R}^n$ 的范数导出的，且这些范数都是等价的.
3. 证明“+”是从 $X\times X$ 到 X 的连续函数且“·”是从 $\mathbf{R}\times X$ 到 X 的连续函数.
4. 证明一个非空集合 M 是线性流形当且仅当 $M+M=M$ 且对于每个 λ，$\lambda M=M$.
5. a. 证明一族线性流形的交集是线性流形. 218

   b. 证明存在一个包含给定集合 A 的最小线性流形 $\{A\}$.

   c. 证明 $\{A\}$ 由所有形如 $\lambda_1 x_1+\cdots+\lambda_n x_n$ 的有限的线性组合组成，其中 $x_i\in A$.
6. a. 若 M 和 N 是线性流形，则 $M+N$ 也是线性流形，且 $M+N=\{M\cup N\}$.

   b. 若 M 是线性流形，则 $\overline{M}$ 也是线性流形.
7. 证明 $[0, 1]$ 上的所有多项式组成的集合 P 是 $C[0, 1]$ 的一个线性流形. 它是闭的吗？给出 $C[0, 1]$ 中闭线性流形的例子.
8. 对于线性流形 M，若存在有限个元素 $x_1, \cdots, x_n$ 使得 $M=\{x_1, \cdots, x_n\}$，我们说它为有限维. 证明赋范向量空间 X 的每个有限维线性流形必定是闭的.
9. 令 S 为中心在 θ 半径为 1 的球体，即 $S=\{x: \|x\|<1\}$. 证明 S 是开的且
$$\overline{S} = \{x: \|x\| \leqslant 1\}.$$
   我们称 S 为开单位球面(或球)，$\overline{S}$ 为闭单位球面(或球).
10. 若定义在向量空间 X 上的非负实值函数 $\|\ \|$ 满足 $\|x+y\| \leqslant \|x\|+\|y\|$ 且 $\|\alpha x\| = |\alpha|\,\|x\|$，则称它为**拟范数**. 证明由 $\|x-y\|=0$ 定义的关系 $x\equiv y$ 是与加法和数乘相容的等价关系，即若 $x\equiv y$，则 $\|x\|=\|y\|$. 令 X' 为 X 在 $\equiv$ 下的等价类的集合，若我们定义 $\alpha x'+\beta y'$ 为包含 $\alpha x+\beta y$ 的(惟一)等价类，其中 $x\in x'$，$y\in y'$，且对于 $x\in x'$ 定义 $\|x'\|=\|x\|$，则 X' 变成一个赋范向量空间. 将 X 映上 X' 的映射 φ 将 X 的每个元素映入它所属的等价类 X'，该映射 φ 是 X 映上 X 的同态(称为自然同态). φ 的核是什么？用 $[0, 1]$ 上的 L^p 空间说明这个过程.
11. 令 X 为赋范线性空间(具有范数 $\|\ \|$)且 M 是 X 的线性流形. 证明 $\|x\|_1=\inf_{m\in M}\|x-m\|$ 定义了 X 上一个拟范数. 令 X' 为由 X 导出的赋范线性空间且拟范数 $\|\cdot\|_1$ 用命题 10 描述的过程得到. 从 X 映上 X' 的自然映射 φ 的核为 $\overline{M}$. 证明 φ 将开集映入开集. 空间 X' 通常记为 $X/\overline{M}$ 且称为 X 模 $\overline{M}$ 的商空间.
12. 证明若 X 是完备的且 M 是 X 的一个闭线性流形，则 X/M 也是完备的. [提示：用命题 1.] 219

10.2 线性算子

A 是向量空间 X 到向量空间 Y 的映射，如果对于所有属于 X 的 x_1 和 x_2 和所有实数 α_1 和 α_2 有
$$A(\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2) = \alpha_1 Ax_1+\alpha_2 Ax_2$$
我们称它为线性映射、线性算子或线性变换. 若 X 和 Y 是赋范向量空间，我们称一个线性算

子 A 有界，若存在常数 M 使得对所有的 x 有 $\|Ax\| \leqslant M\|x\|$. 我们称这个 M 的最小值为 A 的范数且将它记为 $\|A\|$. 因此

$$\|A\| = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq \theta}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

由于 $A(\alpha x) = \alpha A x$，我们也有

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|Ax\|.$$

从 X 到 Y 的有界线性变换 A 称为 X 与 Y 之间的同构，若存在 Y 到 X 的有界线性变换 B 使得 AB 是 Y 上的恒同映射且 BA 是 X 上的恒同映射. 以下命题将线性算子的有界性与连续性的概念联系起来.

2. 命题 一个有界线性算子是一致连续的. 若一个线性算子在一点连续，则它是有界的.

证明 假设 A 有界，那么

$$\|Ax_1 - Ax_2\| \leqslant \|A\| \cdot \|x_1 - x_2\| < \epsilon$$

对于所有 X 中满足 $\|x_1 - x_2\| < \epsilon/\|A\|$ 的 x_1 和 x_2 成立. 因此 A 一致连续.

现在假设线性算子 A 在 x_0 连续，那么存在一个 $\delta > 0$ 使得对所有使得 $\|x - x_0\| < \delta$ 的 x，$\|Ax - Ax_0\| < 1$. 对于 X 中的任意满足 $z \neq \theta$ 的 z，设 $w = \eta z/\|z\|$，其中 $0 < \eta < \delta$，那么

$$\frac{\eta}{\|z\|} Az = Aw = A(w + x_0) - A(x_0)$$

且

220

$$\frac{\eta}{\|z\|} \|Az\| = \|A(w + x_0) - A(x_0)\| < 1,$$

由于 $\|w + x_0 - x_0\| = \|w\| = \eta < \delta$，相应地，$\|Az\| \leqslant \eta^{-1}\|z\|$ 且 A 有界. ■

3. 命题 所有赋范向量空间 X 到巴拿赫空间 Y 的有界线性算子构成的空间 $\mathcal{B}$ 自身是一个巴拿赫空间.

证明 若 A 与 B 属于 $\mathcal{B}$，我们定义 $\alpha A + \beta B$ 为 $(\alpha A + \beta B)x = \alpha Ax + \beta Bx$；容易看出它是一个线性算子. 现在

$$\|\lambda A\| = \sup_{\|x\|=1} \|\lambda Ax\| = |\lambda| \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = |\lambda| \, \|A\|$$

且

$$\|A + B\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax + Bx\| \leqslant \sup_{\|x\|=1} (\|Ax\| + \|Bx\|) \leqslant \|A\| + \|B\|.$$

因此任何两个有界线性算子的线性组合仍是一个有界线性算子. 若 $\|A\| = 0$，则

$$\|Ax\| \leqslant \|A\| \cdot \|x\| = 0,$$

因而 $Ax = \theta$. 因此 $\|A\| = 0$ 仅对算子 0 成立，其将每个 x 映到 θ. 因此 $\|\ \|$ 满足一个范数的所有要求，我们仅需证明若 Y 是完备的则 $\mathcal{B}$ 也是完备的.

令 $\langle A_n \rangle$ 为 $\mathcal{B}$ 中的柯西序列. 对于每个 $x \in X$ 我们有 $\|A_n x - A_m x\| \leqslant \|A_n - A_m\| \cdot \|x\|$，因而 $\langle A_n x \rangle$ 是 Y 中的一个柯西序列且必须收敛于 Y 中的元素 y，我们称这个元素为 Ax. 根据 Ax 的定义，$A(\lambda x) = \lambda Ax$ 且 $A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2$.

为证明线性算子 A 有界，我们观察到，给定 $\epsilon > 0$，存在一个整数 N 使得对于所有 $m, n \geqslant$

N 有 $\|A_n-A_m\|<\varepsilon$. 因此对于所有 $n\geqslant N$ 有 $\|A_n\|<\|A_N\|+\varepsilon$，因而

$$\|Ax\| = \lim\|A_nx\| \leqslant (\|A_N\|+\varepsilon)\|x\|.$$

因此 A 有界. 对于每个属于 X 的 x 我们有

$$\begin{aligned}\|A_nx-Ax\| &= \lim_{m\to\infty}\|A_nx-A_mx\| \\ &\leqslant \overline{\lim_{m\to\infty}}\|A_n-A_m\|\ \|x\| \\ &\leqslant \varepsilon\|x\|\end{aligned}$$

221

因此对 $n\geqslant N$，

$$\|A_n-A\| = \sup_{\|x\|=1}\|(A_n-A)x\| \leqslant \varepsilon.$$

因此 $A_n\to A$ 且 $\mathcal{B}$是完备的. ■

习题

13. 证明若 $A_n\to A$ 且 $x_n\to x$，则 $A_nx_n\to Ax$.
14. 算子 A 的核是集合$\{x: Ax=\theta\}$. 证明一个线性算子的核是一个线性流形且一个连续算子的核是闭的.
15. a. 令 X 为赋范线性空间且 M 为闭的线性流形，那么从 X 映上 X/M 的自然同态 φ 的范数为 1.
    b. 令 X 和 Y 为赋范线性空间，A 是从 X 到 Y 的有界线性算子，其核为 M，那么惟一存在从 X/M 到 Y 的有界线性算子 B 使得 $A=B\circ\varphi$. 而且，$\|A\|=\|B\|$.
16. 令 X 为度量空间，且令 Y 为由 X 上的在一个固定点 $x_0\in X$ 消失并对某个 M(依赖于 f)满足 $|f(x)-f(y)|\leqslant M\rho(x,y)$的实值函数 f 组成的空间. 定义

$$\|f\| = \sup\frac{|f(x)-f(y)|}{\rho(x,y)}.$$

那么 Y 是一个赋范线性空间. 对于每个 $x\in X$，定义为 $F_x(f)=f(x)$的 Y 上的泛函 F_x 是一个有界线性泛函，且 $\|F_x-F_y\|=\rho(x,y)$. 因此 X 等距于空间 Y^* 的子集. Y^* 为 Y 到 $\mathbf{R}$ 的有界线性算子所组成的空间. 由命题 3，由于 Y^* 是完备的，因此这个子集的闭包给出 Y 的完备化，且我们有定理 7.9 的另一个证明.

10.3 线性泛函与哈恩-巴拿赫定理

一个向量空间 X 的线性范函是一个从 X 到实数空间 $\mathbf{R}$ 的线性算子，因此一个线性泛函是一个使得 $f(\alpha x+\beta y)=\alpha f(x)+\beta f(y)$的 X 上的实值函数. 我们关注的第一个问题是如何将一个线性范函从子空间延拓到全空间 X 以保持该泛函的各种性质，其首要结果是下面的定理：

222

4. 定理(哈恩-巴拿赫)　*令 p 为定义在向量空间 X 上的实值函数满足 $p(x+y)\leqslant p(x)+p(y)$且对于每个 $\alpha\geqslant 0$，$p(\alpha x)=\alpha p(x)$. 假定 f 是定义在子空间 S 上的线性泛函，对所有属于 S 的 s，满足 $f(s)\leqslant p(s)$，那么存在一个定义在 X 上的线性泛函 F 使得对所有的 x，$F(x)\leqslant p(x)$，而对所有属于 S 的 s，$F(s)=f(s)$.*

证明　考虑所有定义在 X 的子空间且满足只要 $g(x)$有定义就有 $g(x)\leqslant p(x)$的线性泛函

g. 若定义 g_2 是 g_1 的延拓，即 g_1 的定义域包含于 g_2 的定义域且在 g_1 的定义域有 $g_1=g_2$，就设 $g_1 \prec g_2$，这个集合由此成为偏序集.

根据豪斯多夫极大原理，存在包含给定泛函 f 的极大线性序子族 $\{g_\alpha\}$. 我们定义这些 g_α 的定义域的并集上的泛函 F：若 x 属于 g_α 的定义域设 $F(x)=g_\alpha(x)$. 由于 $\{g_\alpha\}$ 是线性序的，因此该定义与 α 的选择无关. F 的定义域是一个子空间且 F 是一个线性泛函，这是因为若 x 和 y 属于 F 的定义域，则对某两个 α，β，x 属于 g_α 的定义域而 y 属于 g_β 的定义域. 根据 $\{g_\alpha\}$ 的线性序我们有 $g_\alpha \prec g_\beta$ 或者 $g_\beta \prec g_\alpha$. 比如说前一种情况成立，那么 x 和 y 在 g_β 的定义域内因而 $\lambda x+\mu y$ 在 g_β 的定义域内，因而在 F 的定义域内，且 $F(\lambda x+\mu y)=g_\beta(\lambda x+\mu y)=\lambda g_\beta(x)+\mu g_\beta(y)=\lambda F(x)+\mu F(y)$，因此 F 是 f 的延拓. 进一步地，F 是极大延拓. 这是因为若 G 是 F 的任意延拓，根据 $\{g_\alpha\}$ 的极大性，$g_\alpha \prec F \prec G$ 蕴涵 G 必须属于 $\{g_\alpha\}$. 因此 $G \prec F$，因而 $G=F$.

剩下的仅需证明 F 对所有 $x\in X$ 有定义. 由于 F 是极大的，若我们能证明每个定义在 X 的适当的子空间 T 且满足 $g(t)\leqslant p(t)$ 的 g 有一个适当的延拓 h，也就证明了该结论.

令 y 为属于 $X\sim T$ 的一个元素，我们将证明 g 可延拓到由 T 和 y 张成的子空间 U，即延拓到由形如 $\lambda y+t$，$t\in T$ 的元素组成的子空间. 若 h 是 g 的一个延拓，必定有

$$h(\lambda y+t)=\lambda h(y)+h(t)=\lambda h(y)+g(t),$$

因而只要我们指定 $h(y)$，h 就有定义.

对于 t_1，$t_2\in T$，我们有

223

$$g(t_1)+g(t_2)=g(t_1+t_2)\leqslant p(t_1+t_2)\leqslant p(t_1-y)+p(t_2+y).$$

因此

$$-p(t_1-y)+g(t_1)\leqslant p(t_2+y)-g(t_2),$$

因而

$$\sup_{t\in T}[-p(t-y)+g(t)]\leqslant \inf_{t\in T}[p(t+y)-g(t)].$$

定义 $h(y)=\alpha$，其中 α 是实数使得

$$\sup[-p(t-y)+g(t)]\leqslant \alpha\leqslant \inf[p(t+y)-g(t)].$$

现在我们必须证明

$$h(\lambda y+t)=\lambda\alpha+g(t)\leqslant p(\lambda y+t).$$

若 $\lambda>0$，则

$$\begin{aligned}\lambda\alpha+g(t)&=\lambda[\alpha+g(t/\lambda)]\\&\leqslant \lambda[\{p(t/\lambda+y)-g(t/\lambda)\}+g(t/\lambda)]\\&=\lambda p(t/\lambda+y)=p(t+\lambda y).\end{aligned}$$

若 $\lambda=-\mu<0$，则

$$\begin{aligned}-\alpha\mu+g(t)&=\mu(-\alpha+g(t/\mu))\\&\leqslant \mu(\{p(t/\mu-y)-g(t/\mu)\}+g(t/\mu))\\&=\mu p(t/\mu-y)=p(t-\mu y).\end{aligned}$$

因此对于所有 λ，$h(\lambda y+t)\leqslant p(\lambda y+t)$，$h$ 是 g 的适当延拓. ■

哈恩-巴拿赫定理具有广泛应用，其中许多应用是通过巧妙选择次加性函数 p 来实现的，

命题 6 和 7 与定理 20 便是这种类型的运用. 以下命题是哈恩-巴拿赫定理的有用推广(参见习题 20 与 21). 谈到向量空间 X 上的线性算子的阿贝尔半群, 我们指的是从 X 到 X 的线性算子的集合 G 使得若 A 与 B 属于 G, 那么 $AB=BA$ 且 AB 属于 G. 我们也假定恒同算子属于 G.

5. 命题 令 X, S, p 和 f 如定理 4 中定义, 且令 G 为 X 上的线性算子的阿贝尔半群, 使得对于每个属于 G 的 A 我们有 $p(Ax)\leqslant p(x)$ 对所有属于 X 的 x 成立, 而对于每个属于 S 的 s 我们有 As 属于 S 且 $f(As)=f(s)$, 那么存在 f 到 X 上的线性泛函的延拓 F 使得对于所有属于 X 的 x, $F(x)\leqslant p(x)$ 且 $F(Ax)=F(x)$. 224

证明 用以下方式定义 X 上的函数 q:

$$q(x)=\inf\frac{1}{n}p(A_1x+\cdots+A_nx),$$

其中 inf 对所有 G 的有限序列 $\langle A_1, \cdots, A_n\rangle$ 取. 显然我们有 $q(x)\leqslant p(x)$ 且对于 $\alpha\geqslant 0$ 有 $q(\alpha x)=\alpha q(x)$. 对于任意属于 X 的 x 和 y 以及任意 G 中的有限序列对 $\langle A_1, \cdots, A_n\rangle$ 和 $\langle B_1, \cdots, B_m\rangle$, 我们有

$$\begin{aligned}q(x+y)&\leqslant\frac{1}{n\,m}p\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}A_iB_j(x+y)\right)\\&\leqslant\frac{1}{n\,m}p\left(\sum_{j=1}^{m}B_j\left(\sum_{i=1}^{n}A_ix\right)\right)+\frac{1}{n\,m}p\left(\sum_{i=1}^{n}A_i\left(\sum_{j=1}^{m}B_jy\right)\right)\\&\leqslant\frac{1}{n}p\left(\sum_{i=1}^{n}A_ix\right)+\frac{1}{m}p\left(\sum_{j=1}^{m}B_jy\right).\end{aligned}$$

对于每对 $\langle A_i\rangle$, $\langle B_j\rangle$ 取下确界, 我们得到

$$q(x+y)\leqslant q(x)+q(y).$$

由于 $q(\theta)=p(\theta)=0$, 我们有

$$\begin{aligned}0=q(x-x)&\leqslant q(x)+q(-x)\\&\leqslant q(x)+p(-x).\end{aligned}$$

因此 $q(x)$ 不能为 $-\infty$, 且 q 是实值.

对于属于 S 的 s,

$$f(s)=\frac{1}{n}f(A_1s+\cdots+A_ns)\leqslant\frac{1}{n}p(A_1s+\cdots+A_ns).$$

因此 $f(s)\leqslant q(s)$, 用 q 代替 p 我们可以运用定理 4 来得到 f 到所有 X 的延拓 F 使得 $F(x)\leqslant q(x)\leqslant p(x)$. 接下来仅需证明 $F(Ax)=F(x)$. 现在

$$\begin{aligned}q(x-Ax)&\leqslant\frac{1}{n}p((x-Ax)+A(x-Ax)+\cdots+A^n(x-Ax))\\&=\frac{1}{n}p(x-A^{n+1}x)\leqslant\frac{1}{n}[p(x)+p(-x)].\end{aligned}$$

由于这对于每个 n 成立, 我们有 $q(x-Ax)\leqslant 0$. 由于

$$F(x)-F(Ax)=F(x-Ax)\leqslant q(x-Ax)\leqslant 0,$$

我们有 $F(x)\leqslant F(Ax)$, 且将此运用于 $-x$, 我们得到 $F(x)=F(Ax)$. ■ 225

6. 命题 令 x 为赋范向量空间 X 的一个元素，那么存在一个 X 上的有界线性泛函 f 使得 $f(x)=\|f\|\|x\|$.

证明 令 S 为所有 x 的倍数组成的子空间，定义 S 上的函数 f 为 $f(\lambda x)=\lambda\|x\|$ 且设 $p(y)=\|y\|$，那么根据哈恩-巴拿赫定理存在 f 到 X 上的线性泛函的延拓使得 $f(y)\leqslant\|y\|$. 由于 $f(-y)\leqslant\|y\|$，因此有 $\|f\|\leqslant1$，也有 $f(x)=\|x\|\leqslant\|f\|\cdot\|x\|$，因此 $\|f\|=1$ 且 $f(x)=\|f\|\cdot\|x\|$. ∎

7. 命题 令 T 为赋范线性空间 X 的线性子空间，令 y 为 X 的元素，其到 T 的距离至少为 δ，即元素 y 使得对于所有的 $t\in T$ 有 $\|y-t\|\geqslant\delta$，那么存在一个 X 上的有界线性泛函 f 满足 $\|f\|\leqslant1$，$f(y)=\delta$，且对所有 $t\in T$，$f(t)=0$.

证明 令 S 为由 T 和 y 张成的子空间，即由所有形如 $\alpha y+t$，$t\in T$ 的元素组成的子空间，定义 $f(\alpha y+t)=\alpha\delta$，那么 f 是 S 上的一个线性泛函，且由于 $\|\alpha y+t\|=|\alpha|\cdot\|y+t/\alpha\|\geqslant\alpha\delta$，在 S 上有 $f(s)\leqslant\|s\|$. 根据哈恩-巴拿赫定理，我们可以延拓 f 到所有 X 使得 $f(x)\leqslant\|x\|$，但这蕴涵 $\|f\|\leqslant1$. 根据 f 在 S 上的定义，对于 $t\in T$ 我们有 $f(t)=0$ 且 $f(y)=\delta$. ∎

赋范空间 X 上的有界线性泛函所组成的空间称为 X 的**对偶**(或共轭)，记为 X^*. 由于 $\mathbf{R}$ 是完备的，根据命题 3，任何赋范空间 X 的对偶 X^* 是巴拿赫空间. 两个赋范向量空间称为等距同构，若它们之间存在保持范数的一对一的线性映射. 从抽象的观点看，等距同构的空间是相同的，同构映射仅对于元素重新命名. 在第 6 章我们看到对于 $1\leqslant p<\infty$，L^p 的对偶是 L^q(等距同构)，且存在一个用 L^q 的元素来自然地表示 L^p 上的有界线性泛函的方式.

现在可以证明类似的表示对 $L^\infty[0,1]$ 上的有界线性泛函不成立. 我们注意到 $C[0,1]$ 是 $L^\infty[0,1]$ 的闭子空间. 令 f 为 $C[0,1]$ 上的线性泛函，其赋予 $C[0,1]$ 中的每个 x 以 x 在 0 的值 $x(0)$，它在 C 上有范数为 1，因而可被延拓为一个 $L^\infty[0,1]$ 上的有界线性泛函 F. 现在不存在属于 $L^1[0,1]$ 的 y 使得对于所有属于 C 的 x，$F(x)=\int_0^1 xy\,\mathrm{d}t$，这是因为令 $\langle x_n\rangle$ 为 $[0,1]$ 上的连续函数序列，其界为 1，有 $x_n(0)=1$，且使得对于所有 $t\neq0$，$x_n(t)\to0$，那么对于每个 $y\in L^1$，$\int x_n y\to0$，而 $F(x_n)=1$.

[226]

若考虑 X^* 的对偶 X^{**}，那么对于每个属于 X 的 x 对应于 X^{**} 的元素 φx，φx 定义为 $(\varphi x)(f)=f(x)$. 我们有 $\|\varphi x\|=\sup\limits_{\|f\|=1}f(x)$. 由于 $f(x)\leqslant\|f\|\|x\|$，因而有 $\|\varphi x\|\leqslant\|x\|$，根据命题 6 我们有范数为 1 的 f 满足 $f(x)=\|x\|$，因此 $\|\varphi x\|=\|x\|$. 由于 φ 显然是一个线性映射，因此 φ 是 X 映上 X^{**} 的某个线性子空间 $\varphi[X]$的等距同构映射. 映射 φ 称为 X 映到 X^{**} 的自然同构，且若 $\varphi[X]=X^{**}$ 我们说 X 是自反的.

因此若 $1<p<\infty$ 则 L^p 是自反的. 由于存在不是由关于 L^1 的函数的积分给出的 L^∞ 上的泛函，这就得到 L^1 非自反，这与习题 22 表明 L^∞ 不是自反的. 应该观察到 X^* 可与 X^{**} 等距而不自反.

根据命题 3，空间 X^{**} 是完备的，因而根据命题 7.14，X^{**} 的闭包 $\overline{\varphi[X]}$ 必定完备. 因此每个赋范向量空间等距同构于巴拿赫空间的稠密子集.

在结束本节之前，我们对复向量空间的哈恩-巴拿赫定理作一些补充说明. 若我们允许用

复数作乘积，则复向量空间成为向量空间. 哈恩-巴拿赫定理对于复空间的以下推广归功于波恩不拉斯特与索不切克：

8. 命题 令 X 为复向量空间，S 是一个线性子空间，p 是一个 X 上的实值函数满足 $p(x+y)\leqslant p(x)+p(y)$ 且 $p(\alpha x)=|\alpha|p(x)$，令 f 为 S 上的(复)线性泛函使得对所有属于 S 的 s，$|f(s)|\leqslant p(s)$，那么存在定义在 X 上的线性泛函 F 使得对于属于 S 的 s 有 $F(s)=f(s)$ 及对于所有属于 X 的 x 有 $|F(x)|\leqslant p(x)$.

证明 我们首先注意到若简单地忽略复数作乘积的可能性，则 X 可被认为是实向量空间. 从 X 到复数的实意义下的线性映射 F 在复意义下线性当且仅当对每个 x 有 $F(\mathrm{i}x)=\mathrm{i}F(x)$. 在 S 上定义 g 和 h，取 $g(s)$ 为 $f(s)$ 的实部并取 $h(s)$ 为 $f(s)$ 的虚部，那么在实意义下 g 和 h 线性且 $f=g+\mathrm{i}h$. 由于 f 在复意义下线性，$g(\mathrm{i}s)+\mathrm{i}h(\mathrm{i}s)=f(\mathrm{i}s)=\mathrm{i}f(s)=\mathrm{i}g(s)-h(s)$，因而 $h(s)=-g(\mathrm{i}s)$.

227

由于 $g(s)\leqslant|f(s)|\leqslant p(s)$，因此能将 g 延拓到 X 上的实意义下的线性泛函 G 且满足 $G(x)\leqslant p(x)$. 令 $F(x)=G(x)-\mathrm{i}\,G(\mathrm{i}x)$，那么对于属于 S 的 s，$F(s)=f(s)$. 由于 $F(\mathrm{i}x)=G(\mathrm{i}x)-\mathrm{i}\,G(\mathrm{i}x)=\mathrm{i}[G(x)-\mathrm{i}\,G(\mathrm{i}x)]$，因此 F 在复意义下线性. 对于任意 x，选取复数 ω 使得 $|\omega|=1$ 且 $\omega F(x)=|F(x)|$，那么

$$|F(x)|=\omega F(x)=F(\omega x)=G(\omega x)\leqslant p(\omega x)=p(x).$$ ■

习题

17. 证明赋范线性空间上的线性泛函 f 有界当且仅当它的核是闭的. [f 的核是 $\{x: f(x)=0\}$.]
18. 令 T 为赋范线性空间 X 的线性子空间且 y 是 X 的给定元素，证明 $\inf\limits_{t\in T}\|y-t\|=\sup\{f(y): \|f\|=1, f(t)=0\text{对于所有 } t\in T\}$.
19. 通过取 S 为 y 的数乘组成的子空间，$f(\lambda y)=\lambda\delta$，且 $p(x)=\inf\limits_{t\in T}\|x-t\|$ 证明命题 7.
20. 令 l^∞ 为所有有界序列组成的空间，用命题 5 证明存在一个 l^∞ 上具有下列性质的线性泛函 F：
    i. $\underline{\lim}\,\xi_n\leqslant F[\langle\xi_n\rangle]\leqslant\overline{\lim}\,\xi_n$.
    ii. $F[\langle\xi_n+\eta_n\rangle]=F[\langle\xi_n\rangle]+F[\langle\eta_n\rangle]$.
    iii. $F[\langle\alpha\xi_n\rangle]=\alpha F[\langle\xi_n\rangle]$.
    iv. 若 $\eta_n=\xi_{n+1}$，则 $F[\langle\eta_n\rangle]=F[\langle\xi_n\rangle]$.
    泛函 F 称为巴拿赫极限，通常记为 Lim.
21. 用命题 5 证明存在一个对 $\mathbf{R}$ 的所有有界集合定义的集函数 μ，它具有下列性质：
    i. 若 $A\cap B=\varnothing$，则 $\mu(A\cup B)=\mu A+\mu B$.
    ii. $\mu(A+t)=\mu A$.
    iii. 若 $A\subset B$，则 $\mu A\leqslant\mu B$.
    iv. 若 A 是勒贝格可测的，那么 μA 是 A 的勒贝格测度. [提示：用积分比用集合易于处理.]

22. 证明一个巴拿赫空间 X 是自反的当且仅当 X^* 是自反的．［提示：若 $\varphi[X]$不是所有的 X^{**}，那么存在一个非零函数 $y\in X^{***}$ 使得对所有 $x\in\varphi[X]$，$y(x)=0$.］
23. 若 S 是巴拿赫空间 X 的线性子空间，我们定义 S 的零化子 S^0 为子集 $S^0=\{y\in X^*: y(s)=0$ 对所有 $s\in S$ 成立$\}$．若 T 是 X^* 的子空间，我们定义 $T^0=\{x\in X: t(x)=0$ 对所有 $t\in T$ 成立$\}$.

228

    a. 证明 S^0 是 X^* 的闭线性子空间.
    b. 证明 $S^{00}=\overline{S}$.
    c. 若 S 是 X 的闭子空间，那么 S^* 同构于 X^*/S^0.
    d. 若 S 是自反巴拿赫空间 X 的闭子空间，那么 S 是自反的.
24. 令 X 为向量空间，P 是 X 的子集使得 x，$y\in P$ 蕴涵 $x+y\in P$ 且对于 $\alpha>0$ 有 $\alpha x\in P$．通过定义 $x\leqslant y$ 意味着 $y-x\in P$ 定义 X 的偏序．X 上的线性泛函 f 称为(关于 P)正的：若对于所有 $x\in P$，$f(x)\geqslant 0$．令 S 为 X 的任何子空间具有性质：对每个 $x\in X$ 存在 $s\in S$ 使得 $x\leqslant s$．那么每个 S 上的正线性泛函可延拓为 X 上的正线性泛函．［提示：证明的超限部分与哈恩-巴拿赫定理的证明相同．将一个泛函延拓到包含多增加一个元素的空间甚至比对哈恩-巴拿赫定理的证明更简单.］
25. 令 f 为从单位球 $S=\{x: \|x\|\leqslant 1\}$ 到 $\mathbf{R}$ 的映射使得只要有 x，y 和 $\alpha x+\beta y$ 属于 S 就有 $f(\alpha x+\beta y)=\alpha f(x)+\beta f(y)$，证明 f 可被延拓为所有 X 的线性泛函.

10.4　闭图像定理

从一个拓扑空间到另一个拓扑空间的映射称为*开映射*，若每个开集的像是开的，因此一个一对一的连续开映射是一个同胚映射．我们将证明一个巴拿赫空间映上另一个巴拿赫空间的连续线性变换总是开的并且用此作为线性变换连续性的准则．我们从引理开始.

9. 引理　*令 A 是巴拿赫空间 X 映上巴拿赫空间 Y 的连续线性变换，那么 X 的单位球在 A 的像包含 Y 的某个关于原点的球.*

证明　令 $S_n=\{x: \|x\|<1/2^n\}$．由于 A 是映上的且

$$X=\bigcup_{k=1}^{\infty} kS_1,$$

我们有

229

$$Y=\bigcup_{k=1}^{\infty} kA(S_1).$$

但 Y 是完备度量空间，因而在本质上不是第一范畴集．因此，$A(S_1)$不可能无处稠密，因此 $\overline{A(S_1)}$包含某个球，比如说

$$\{y: \|y-p\|<\eta\}.$$

那么$\overline{A(S_1)}-p$ 包含球

$$\{y: \|y\|<\eta\}.$$

但

$$\overline{A(S_1)}-p\subset\overline{A(S_1)}-\overline{A(S_1)}\subset 2\,\overline{A(S_1)}=\overline{A(S_0)}.$$

因此$\overline{A(S_0)}$包含关于原点半径为 η 的球，因而根据 A 的线性性，$\overline{A(S_n)}$包含关于原点半径为 $\eta/2^n$ 的球.

我们现在证明 $A(S_0)$包含关于原点半径为 $\eta/2$ 的球. 令 y 为 Y 中满足 $\|y\|<\eta/2$ 的任意点，由于 $y\in\overline{A(S_1)}$，因此能够选择 $x_1\in S_1$使得

$$\|y-A(x_1)\|<\frac{\eta}{4}.$$

类似地，我们可以选取 $x_2\in S_2$使得

$$\|y-A(x_1)-A(x_2)\|<\frac{\eta}{8},$$

继续下去使得我们选取 $x_n\in S_n$满足

$$\|y-\sum_{k=1}^{n}A(x_k)\|<\frac{\eta}{2^{n+1}}.$$

由于 $\|x_k\|<1/2^k$，因此级数 $\sum_{k=1}^{\infty}x_k$ 绝对收敛且 $x=\sum_{k=1}^{\infty}x_k$ 属于 S_0. 此外，

$$A(x)=A\left(\sum_{k=1}^{\infty}x_k\right)=\sum_{k=1}^{\infty}A(x_k)=y.$$

因此 $y\in A(S_0)$因而

$$\left\{y:\|y\|<\frac{\eta}{2}\right\}\subset A(S_0).$$ ■

10. 命题 巴拿赫空间 X 映上一个巴拿赫空间 Y 的连续线性变换 A 是一个开映射，因此特别地，若 A 是一对一映射，那么它是一个同构.

230

证明 令 O 为 X 的任意开集且 y 是 $A[O]$的任意点，那么存在某个 $x\in O$ 使得 $y=A(x)$. 由于 O 是开的，因此存在一个包含 x 且包含于 O 的球 S. 但引理 9 叙述的是 $A[S-x]$必须包含关于原点的球或 $A[S]$必须包含关于 y 的球，因此 y 包含于一个包含于 $A[O]$的球，因而 $A[O]$是开的. ■

11. 命题 令 X 为线性向量空间且在每个范数 $\|\ \|$ 和 $|||\ |||$ 中完备，且假定存在一个常数 C 使得对于所有 $x\in X$ 有

$$\|x\|\leqslant C|||x|||,$$

那么两个范数等价. 即，存在第二个常数 C'使得对于所有 $x\in X$

$$|||x|||\leqslant C'\|x\|$$

成立.

证明 $(X, |||\ |||)$映上$(X, \|\ \|)$的恒同映射是一对一连续线性变换，因而根据命题 10 必须是同构映射. 因此逆映射必须有界. ■

12. 闭图像定理 令 A 为巴拿赫空间 X 到一个巴拿赫空间 Y 的连续线性变换. 假定 A 具有性质：只要$\langle x_n\rangle$是 X 内收敛于某个点 x 的序列且$\langle Ax_n\rangle$在 Y 中收敛于点 y，那么 $y=Ax$. 那么 A 是连续的.

证明 定义一个 X 上的新范数

$$|||x||| = \|x\| + \|Ax\|.$$

那么 X 在范数 $|||\ \ |||$ 中是完备的，这是因为若 $|||x_p - x_q||| \to 0$，那么 $\|x_p - x_q\| \to 0$ 且 $\|Ax_p - Ax_q\| \to 0$. 因此根据 X 和 Y 的完备性我们有 $x \in X$ 与 $y \in Y$ 使得 $\|x_p - x\| \to 0$ 且 $\|Ax_p - y\| \to 0$. 根据我们定理的假设 $y = Ax$，因此 $|||x_p - x||| \to 0$，X 关于 $|||\ \ |||$ 完备. 但现在命题 11 适用，存在 C' 使得

$$\|x\| + \|Ax\| \leqslant C'\|x\|.$$

因此

$$\|Ax\| \leqslant C'\|x\|,$$

231　因而 A 是有界的. ■

X 到 Y 的映射的图像恰为属于 $X \times Y$ 的所有 $\langle x, Ax \rangle$ 的集合. 定理 12 的假设仅说的是 A 的图像是闭的.

以下命题是范畴理论的另一推论，即人们熟知的一致有界原理.

13. 命题　令 X 为一个巴拿赫空间且 $\mathcal{F}$ 是一个从 X 到赋范空间 Y 的有界线性算子族. 假定对于每个属于 X 的 x 存在一个常数 M_x 使得对于所有属于 $\mathcal{F}$ 的 T 有 $\|Tx\| \leqslant M_x$，那么 $\mathcal{F}$ 内的算子一致有界；即存在常数 M 使得对于所有属于 $\mathcal{F}$ 的 T，$\|T\| \leqslant M$.

证明　对于每个 T 定义 X 上的连续实值函数 f 为 $f(x) = \|Tx\|$. 由于这些函数族在每个属于 X 的 x 上有界且 X 完备，根据定理 7.32 存在属于 X 的开集 O 使得这些函数在其上一致有界. 因此存在一个常数 M' 使得对于所有 $x \in O$，$\|Tx\| \leqslant M'$. 令 y 为 O 的点，由于 O 是开的，因此存在某个中心为 y 半径为 δ 的球 $S = \{x: \|x - y\| < \delta\}$ 包含于 O. 若 $\|z\| \leqslant \delta$，则 $Tz = T(y+z) - Ty$，其中 $y + z$ 属于 $S \subset O$. 因此 $\|Tz\| \leqslant \|T(y+z)\| + \|Ty\| \leqslant M' + M_y$，因此对于所有属于 $\mathcal{F}$ 的 T，$\|T\| \leqslant (M' + M_y)/\delta$. ■

习题

26. 令 $\langle T_n \rangle$ 为从巴拿赫空间 X 到赋范向量空间 Y 的连续线性算子序列，且假定对于每个属于 X 的 x，序列 $\langle T_n x \rangle$ 收敛于值 Tx，那么 T 是一个有界线性算子.
27. 令 A 为从一个巴拿赫空间 X 到一个巴拿赫空间 Y 的有界线性变换，且令 M 为 A 的核，S 为 A 的值域，那么 S 同构于 X/M 当且仅当 S 是闭的.
28. 令 S 为 $C[0, 1]$ 的线性子空间且作为 $L^2[0, 1]$ 的子空间是闭的.
    a. 证明 S 是 $C[0, 1]$ 的闭子空间.
    b. 证明存在一个常数 M 使得对于所有 $f \in S$ 有
    $$\|f\|_2 \leqslant \|f\|_\infty \text{ 与 } \|f\|_\infty \leqslant M\|f\|_2.$$
    c. 证明对于每个 $y \in [0,1]$，存在 L^2 的函数 k_y 使得对于每个 $f \in S$ 有 $f(y) = \int k_y(x) f(x) \mathrm{d}x$.

232　可以证明空间 S 是有限维的(见习题 41 或 55).

29. a. 给出一个从赋范线性空间 X 到巴拿赫空间 Y 的不连续算子 A 使得 A 有一个闭图像的例子. [提示：令 f 为巴拿赫空间 X 上的不连续线性泛函，令 $X = \{x \in Y \oplus \mathbf{R}: x =$

$\langle y, f(y)\rangle\}$.]

b. 给出一个从巴拿赫空间 X 到赋范线性空间 Y 的不连续算子 A 使得 A 有一个闭图像的例子.

10.5 拓扑向量空间

如同度量空间的概念可推广到拓扑空间，赋范线性空间的概念可推广到拓扑向量空间：若具有拓扑 $\mathfrak{J}$ 的线性向量空间 X 的加法是从 $X\times X$ 到 X 的连续函数且数乘是从 $\mathbf{R}\times X$ 到 X 的连续函数，那么我们称它为*拓扑向量空间*. 根据加法的连续性，平移元素 x 是一个同胚映射且开集 O 的平移 $x+O$ 是开的. 向量空间上的任何具有这个性质的拓扑称为*平移不变拓扑*. 若 $\mathfrak{J}$ 是 X 上一个平移不变拓扑，$\mathcal{B}$ 是 $\mathfrak{J}$ 在 θ 的基，则形如 $x+U$，$U\in\mathcal{B}$ 的集合构成 $\mathfrak{J}$ 在 x 的基. 因此为确定一个平移不变拓扑仅需给出在 θ 的一个基，在 θ 的一个基常常称为*局部基*. 以下命题给出了在何条件下集合 $\mathcal{B}$ 成为拓扑向量空间的拓扑的一个基，它也表明我们总是可以找到满足这些条件的基.

14. 命题 *令 X 为拓扑向量空间，那么我们可以找到一个满足下列条件的在 θ 的一个基 $\mathcal{B}$.*

i. *若 U，$V\in\mathcal{B}$，则存在一个 $W\in\mathcal{B}$ 满足 $W\subset U\cap V$.*

ii. *若 $U\in\mathcal{B}$ 且 $x\in U$，则存在一个 $V\in\mathcal{B}$ 使得 $x+V\subset U$.*

iii. *若 $U\in\mathcal{B}$，则存在一个 $V\in\mathcal{B}$ 使得 $V+V\subset U$.*

iv. *若 $U\in\mathcal{B}$ 且 $x\in X$，则存在一个 $\alpha\in\mathbf{R}$ 使得 $x\in\alpha U$.*

v. *若 $U\in\mathcal{B}$ 且 $0<|\alpha|\leqslant 1$，则 $\alpha U\subset U$ 且 $\alpha U\in\mathcal{B}$.*

反过来，给定满足上述条件的包含 θ 的子集簇 $\mathcal{B}$，存在 X 的拓扑使得 X 成为拓扑向量空间且以 $\mathcal{B}$ 为在 θ 的基. 这个拓扑是豪斯多夫的当且仅当

vi. $\bigcap\{U\in\mathcal{B}\}=\{\theta\}$.

233

命题的证明留给读者. 我们注意到，若 X 是一个赋范线性空间，则可以取 $\mathcal{B}$ 为关于 θ 的球的集合，且对于一般情形该命题给了我们一个基，这个基具有球簇的许多性质.

在一个拓扑向量空间中，通过平移我们能够比较不同点的邻域，因此可以讨论一致性质：一个拓扑向量空间 X 到一个拓扑向量空间 Y 的映射 f 称为一致连续若对于 Y 中任何包含原点的开集 O，存在 X 中的包含原点的开集 U 使得对于每个 $x\in X$ 我们有 $f[x+U]\subset f(x)+O$. 容易看出若从 X 到 Y 的线性变换在一点连续则它一致连续. 对于 X 映上 Y 的一对一线性映射 φ，若 φ 和 φ^{-1} 都连续则我们称它为(拓扑)*同构*. 从抽象的观点来看同构的空间是相同的. 以下定理告诉我们在有限维向量空间上，仅有通常的拓扑使它成为一个拓扑向量空间.

15. 命题(吉洪诺夫) *令 X 为有限维豪斯多夫拓扑向量空间，那么对某个 n，X 拓扑同构于 $\mathbf{R}^n$.*

习题 33 给出了如何证明该命题的建议. 习题 34、35 和 36 给出了一些有用的系.

习题

30. 证明命题 14：

a. 当且仅当(i)和(ii)成立时包含 θ 的子集簇 $\mathcal{B}$ 是平移不变拓扑在 θ 的基.

b. 当且仅当(iii)时加法是从 $X\times X$ 到 X 的连续映射.

c. 若数乘是从 $\mathbf{R}\times X$ 到 X 的连续映射(在$\langle 0, \theta\rangle$)，那么(iv)成立.

d. 若 X 是拓扑向量空间，那么所有包含 θ 且使得对所有满足 $|\alpha|<1$ 的 α 有 $\alpha U\subset U$ 的开集 U 所组成的族$\mathcal{B}$是这个拓扑的局部基且满足(v). [若 O 是任意包含 θ 的开集，乘法的连续性蕴涵存在包含 θ 的开集 V 和一个 $\varepsilon>0$ 使得对所有 $|\lambda|<\varepsilon$ 有 $\lambda V\subset O$，那么 $U=\bigcup_{|\lambda|<\varepsilon}\lambda V$ 是开的，$\theta\in U\subset O$ 且对每个满足 $|\alpha|<1$ 的 α，$\alpha U\subset U$.]

234

e. 若$\mathcal{B}$满足这个命题的条件，则它生成一个拓扑使得数乘是从 $\mathbf{R}\times X$ 到 X 的连续映射. [证明(iv)和(v)蕴涵在$\langle 0, x\rangle$和$\langle\alpha, \theta\rangle$的连续性，并运用(iii).]

f. 若 X 是 T_1，则(vi)成立. 若(vi)和(iii)成立，则 X 是豪斯多夫.

31. a. 证明若从一个拓扑向量空间到另一个拓扑向量空间的线性变换在一点连续则它一致连续.

b. 证明 X 上的一个线性泛函 f 是连续的当且仅当存在一个开集 O 使得 $f[O]\neq\mathbf{R}$. [提示：可以取 O 满足命题 14 的性质(v).]

32. 令 X 为拓扑向量空间且 M 是闭线性子空间，令 φ 为 X 映上 X/M 的自然同态，且通过取 O 为开集(当且仅当 $\varphi^{-1}[O]$在 X 是开的)来定义 X/M 上的拓扑，那么这个拓扑使得 X/M 成为一个拓扑向量空间且 φ 是连续的开映射. 谈到 X/M 作为一个拓扑向量空间，我们总是 X/M 具有这个拓扑.

33. 证明命题 15：

a. 若 X 是 n 维的，则存在一个将 $\mathbf{R}^n$映上 X 的连续的一对一线性映射 φ.

b. 令 S 和 B 为如下定义的 $\mathbf{R}^n$的子集：$S=\{y:\|y\|=1\}$，$B=\{y:\|y\|<1\}$，那么 $\varphi[S]$是闭的且 $X\sim\varphi[S]$是开的.

c. 存在一个 X 的包含 θ 的开集 U 使得对于每个 $|\alpha|<1$，$\alpha U\subset U$ 且 $U\subset X\sim\varphi[S]$.

d. (c)部分的集合 U 包含于 $\varphi[B]$，因而 φ^{-1}是连续的.

34. 证明一个豪斯多夫拓扑向量空间 X 的有限维子空间 M 是闭的. [提示：若 $x\notin M$，令 N 为由 x 和 M 张成的有限维子空间，则 N 具有通常的拓扑，因而 x 不是 M 的闭包的点.]

35. 令 A 为从有限维豪斯多夫向量空间 X 到拓扑向量空间 Y 的线性映射，那么 A 是连续的. [提示：A 的值域是有限维的因此具有通常的拓扑.]

36. 一个从拓扑向量空间 X 到有限维拓扑空间 Y 的线性映射 A 是连续的当且仅当它的核 M 是闭的. [提示：$A=B\circ\varphi$，这里 φ 是 X 映上 X/M 的自然映射，且根据习题 35，B 是连续的.]

235

37. 证明每个局部紧豪斯多夫向量空间 X 是有限维的. [提示：令 V 为 θ 的邻域满足 $\overline{V}$ 紧且对于每个满足 $|\alpha|<1$ 的 α，$\alpha V\subset V$. 若我们用有限个平移 $x_1+\frac{1}{3}V$，…，$x_n+\frac{1}{3}V$ 覆盖$\overline{V}$，则 x_1，…，x_n构成 X 的基.]

10.6　弱拓扑

若 X 是任意向量空间且$\mathcal{F}$是 X 上的线性泛函簇，我们定义由$\mathcal{F}$生成的弱拓扑为使得$\mathcal{F}$内的每个 f 连续的最弱拓扑(参见习题 8.25). 容易看到这样的拓扑是平移不变的，且其在 θ 的基由

集合$\{x: |f_i(x)|<\varepsilon, i=1, \cdots, n\}$给出，其中$\varepsilon>0$且$\{f_1, \cdots, f_n\}$是$\mathcal{F}$的有限子集. 由于所有这样的集族满足命题 14 的条件，这个拓扑使得 X 成为拓扑向量空间. 一个序列(或网格)$\langle x_n\rangle$在这个拓扑收敛于 x 当且仅当对于每个 $f\in\mathcal{F}$，$f(x_n)\to f(x)$.

若 X 是赋范线性空间且$\mathcal{F}$内的泛函全部连续(即，若$\mathcal{F}\subset X^*$)，则由$\mathcal{F}$生成的弱拓扑比 X 的范数拓扑弱(有较少开集)，我们通常称由范数生成的度量拓扑为强拓扑且由 X^* 生成的 X 上的弱拓扑为 X 的*弱拓扑*. 因此我们谈到的强闭集和强开集是对强拓扑而言而弱开集和弱闭集是对弱拓扑而言. 每个弱闭集是强闭的但反过来不成立. 每个强收敛的序列(或网格)是弱收敛的. 虽然并非每个强闭集也是弱闭集，但我们有以下命题，系 23 给出它的一个推广.

16. 命题 *一个线性流形 M 是弱闭的当且仅当它是强闭的.*

证明 由于每个弱闭集是强闭的，我们仅需证明若 M 是强闭集，它也是弱闭集. 假定 M 是强闭集且 x 是不在 M 的点，我们必须证明在弱拓扑下 x 不是 M 的闭包的点. 由于 x 在强(度量)拓扑下不是 M 的闭包的点，我们有

$$\inf_{s\in M}\|x-s\| \geqslant \delta > 0.$$

因此根据命题 7 存在在 M 消失而在 x 不消失的连续线性泛函 f. 现在在弱拓扑中$\{y: f(y)\neq 0\}$是一个包含 x 但不与 M 相交的开集，因此 x 不是 M 的闭包的弱点. ■ [236]

若我们运用弱拓扑的概念于赋范空间 X 的对偶 X^*，可以看到 X^* 的弱拓扑是使得 X^{**} 上的所有泛函都连续的最弱的拓扑. 这个 X^* 的弱拓扑比由 X(或更确切地由 $\varphi[X]$生成，其中 φ 是从 X 到 X^{**} 的自然嵌入)生成的 X^* 的弱拓扑的用途少. 这个拓扑称为 X^* 的*弱*拓扑*，它甚至比弱拓扑更弱. 因此 X^* 的一个弱*闭子集是弱闭的，且弱收敛蕴涵弱*收敛. 弱*拓扑在 θ 的基由形如$\{f: |f(x_i)|<\varepsilon, i=1, \cdots, n\}$的集合给出，其中$\{x_1, \cdots, x_n\}$是 X 的有限子集. 若 X 自反，则 X^* 的弱拓扑与弱*拓扑重合. 弱*拓扑的一些重要性从以下定理生长出来：

17. 定理(Alaoglu) *X^* 的单位球 $S^*=\{f: \|f\|\leqslant 1\}$在弱*拓扑下是紧的.*

证明 若 $f\in S^*$，则$|f(x)|\leqslant\|x\|$，因而 $f(x)\in[-\|x\|, \|x\|]$. 令 $I_x=[-\|x\|, \|x\|]$，那么每个 $f\in S^*$ 对应于

$$P=\bigtimes_{x\in X} I_x,$$

的点. 由于根据定义后者是 X 上的所有使得 $f(x)\in I_x$的函数所组成的集合，因此我们可以认为 S^* 是 P 的一个子集，且 P 的拓扑的定义表明拓扑 S^* 作为 P 的子空间承袭的是 S^* 的弱*拓扑. 由于根据吉洪诺夫定理 P 是紧的，因此若 S^* 是 P 的闭子集则它是紧的. 令 f 为 S^* 在 P 的闭包的点，那么 f 是从 X 到 $\mathbf{R}$ 的映射. 由于对于 $g\in S^*$，$|g(x)|\leqslant\|x\|$，且在 x 的估值是 P 上的连续函数，因此有$|f(x)|\leqslant\|x\|$. 令 x，y 和 z 为 X 的三个点使得 $z=\alpha x+\beta y$，对于每个 $\varepsilon>0$，集合

$$N=\{g\in P: |g(x)-f(x)|<\varepsilon, |g(y)-f(y)|<\varepsilon, |g(z)-f(z)|<\varepsilon\}$$

是包含 f 的 P 的开子集. 由于 f 是 S^* 闭包的点，因此能够找到一个 g 属于 $S^*\cap N$. 由于 g 线性(属于 S^*)，因此有 $g(z)=\alpha g(x)+\beta g(y)$. 因此就得到$|f(z)-\alpha f(x)-\beta f(y)|<\varepsilon(1+|\alpha|+|\beta|)$. 这个不等式对于每个正数 ε 成立，我们有 $f(z)=\alpha f(x)+\beta f(y)$，且 f 在 X 是线性的. 因此 f 属于 S^*，因而 S^* 是闭的. ■ [237]

习题

38. a. 证明若在弱意义下 $x_n \to x$，则 $\langle \| x_n \| \rangle$ 有界.
   b. 令 $\langle x_n \rangle$ 为 l^p 的序列，$1<p<\infty$，且令 $x_n=\langle \xi_{m,n} \rangle_{m=1}^{\infty}$，证明 $\langle x_n \rangle$ 弱收敛于 $x=\langle \xi_m \rangle$ 当且仅当 $\langle \| x_n \| \rangle$ 有界且对于每个 m 我们有 $\xi_{m,n} \to \xi_m$.
   c. 令 $\langle x_n \rangle$ 为 $L^p[0, 1]$ 的序列，$1<p<\infty$. 证明 $\langle x_n \rangle$ 弱收敛于 x 当且仅当 $\langle \| x_n \| \rangle$ 有界且 $\langle x_n \rangle$ 依测度收敛于 x(参见习题 6.17).
   d. 证明若 $p=1$ 则(c)部分是不成立的.
   e. 在 l^p，$1<p<\infty$，令 x_n 为第 n 项等于 1 其余项等于零的序列，那么 $\langle x_n \rangle$ 在强拓扑下不收敛，但在弱拓扑下 $x_n \to 0$.
   f. 令 $\langle x_n \rangle$ 如(e)中所定义，且定义 $y_{n,m}=x_n+n\,x_m$，那么集合 $F=\{y_{n,m}: m>n\}$ 是强闭的. [提示：F 的任意两点的距离至少为 1. 因此 F 不包含在强拓扑下收敛的非常数序列.]
   g. (f)的集合 F 有 θ 作为弱闭包的点，然而 F 中不存在弱收敛于 0 的序列 $\langle z_n \rangle$.
   h. 描述作为 c_0 的对偶的 l^1 的弱拓扑与弱*拓扑.
39. a. 令 S 为赋范空间的有界子集，令 $\mathcal{F}$ 为 X^* 内的泛函集合且令 $\mathcal{F}_0$ 为 $\mathcal{F}$ 的稠密子集(在 X^* 的范数拓扑意义下稠密)，那么 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{F}_0$ 可以生成 X 的不同弱拓扑，但这些拓扑在 S 上是相同的；即 S 承袭自 $\mathcal{F}$ 的拓扑与承袭自 $\mathcal{F}_0$ 的拓扑相同.
   b. 令 S^* 为可分巴拿赫空间 X 的对偶 X^* 中的单位球，那么 S^* 上的弱*拓扑是可度量化的. (注意：这不意味着 X^* 上的弱*拓扑可度量化!)
40. 证明每个弱紧集在范数拓扑中有界.
41. 令 S 为习题 28 给出的 $C[0, 1]$ 的线性子空间.
   a. 证明若在 L^2 弱意义下有 $f_n \to f$，则对于每个 $y\in[0, 1]$，$f_n(y) \to f(y)$.
   b. 若在 L^2 弱意义下有 $f_n \to f$，则 $\| f_n \|_\infty$ 有界，且因此根据勒贝格收敛定理，在 L^2 强意义下有 $f_n \to f$.
   c. 空间 S 是 L^2 的局部紧子空间，因此是有限维的.

238

10.7　凸性

向量空间 X 的子集 K 称为**凸的**，若只要它包含 x 和 y，它也包含 $\lambda x+(1-\lambda)y$，这里 $0\leqslant\lambda\leqslant 1$. 集合 $\{z: z=\lambda x+(1-\lambda)y, 0\leqslant\lambda\leqslant 1\}$ 称为连接 x 和 y 的线段，点 x 和 y 是它的端点，$0<\lambda<1$ 对应的点 z 称为线段的内部点. 因此一个集合 K 是凸的当且仅当只要它包含 x 和 y 它就包含连接 x 和 y 的线段. 每个线性流形是凸的，赋范空间的单位球是凸的. 以下引理给出了凸集的一些基本性质，凸集另外的性质由习题 42，43 和 44 给出. 引理的证明可直接得到因而我们省略.

18. 引理　*若 K_1 和 K_2 是凸集，则集合 $K_1\cap K_2$，λK_1 和 K_1+K_2 也是凸集.*

点 x_0 称为集合 K 的**内点**，若每条过 x_0 的直线与 K 的交集包含一个关于 x_0 的开区间，因此 x_0 是 K 的内点，若给定 $x\in X$，存在 $\varepsilon>0$ 使得对于所有满足 $|\lambda|<\varepsilon$ 的 λ，$x_0+\lambda x\in K$. 令 K 为包含 θ 作为内点的凸集，那么我们定义 K 的(关于 θ)支撑函数 p 为 $p(x)=\inf\{\lambda: \lambda^{-1}x\in$

K，$\lambda>0\}$. 对于这个支撑函数我们有下列性质：

19. 引理　若 K 是包含 θ 作为内点的凸集，则支撑函数 p 具有以下性质：

i. $p(\lambda x)=\lambda p(x)$，$\lambda\geqslant 0$.

ii. $p(x+y)\leqslant p(x)+p(y)$.

iii. $\{x: p(x)<1\}\subset K\subset\{x: p(x)\leqslant 1\}$.

证明　第一个和第三个性质直接从 p 的定义得到. 为证明第二个性质，假定 $\lambda^{-1}x$ 和 $\mu^{-1}y$ 属于 K，那么由于 K 是凸的，

$$(\lambda+\mu)^{-1}(x+y)=\lambda(\lambda+\mu)^{-1}(\lambda^{-1}x)+\mu(\lambda+\mu)^{-1}(\mu^{-1}y)$$

属于 K. 因此 $p(x+y)\leqslant\lambda+\mu$，对于所有容许的 λ 和 μ 取下确界我们得到 $p(x+y)\leqslant p(x)+p(y)$. ■　[239]

两个凸集 K_1 和 K_2 称为被线性泛函 f **分离**若存在一个实数 α 使得在 K_1 上 $f(x)\leqslant\alpha$ 且在 K_2 上 $f(x)\geqslant\alpha$.

20. 定理　令 K_1 和 K_2 为向量空间 X 的两个不相交凸集，且假定其中一个有内点，那么存在一个非零线性泛函 f 分离 K_1 与 K_2.

证明　令 x_1 为 K_1 的内点，那么 K_1-K_2 是凸的，且对于任何属于 K_2 的 x_2，点 $x_0=x_1-x_2$ 是 K_1-K_2 的内点. 令 $K=K_1-K_2-x_0$，那么 K 是一个包含 θ 作为内点的凸集. 由于 K_1 和 K_2 不相交，因而 $\theta\notin K_1-K_2$，因而 $-x_0\notin K$.

令 p 为 K 的支撑函数(关于 θ)，那么 $p(-x_0)\geqslant 1$. 令 S 为由所有 x_0 的数乘所得的元素组成的 X 的一维子空间. 定义 S 上的函数 f 为 $f(\alpha x_0)=-\alpha$，那么 $f(s)\leqslant p(s)$ 且根据引理 19，p 满足哈恩-巴拿赫定理的条件. 因此我们可以将 f 延拓到定义在所有 X 上的线性泛函，使得对于所有 x 有 $f(x)\leqslant p(x)$. 因此若 $x\in K$，我们有 $f(x)\leqslant 1$.

令 $x\in K_1$ 且 $y\in K_2$，那么 $x-y-x_0\in K$，且我们有

$$f(x)-f(y)-f(x_0)=f(x-y-x_0)\leqslant 1.$$

由于 $f(x_0)=-1$，因此有 $f(x)\leqslant f(y)$，这对于每个 $x\in K_1$ 和 $y\in K_2$ 都成立，我们有 $\sup_{x\in K_1}f(x)\leqslant\inf_{y\in K_2}f(y)$. 因此 f 分离 K_1 和 K_2，且由于 $f(x_0)=-1$，所以 f 是非零泛函. ■

对于一个拓扑向量空间，若我们可以找到由凸集组成的拓扑基，则称它为**局部凸的**. 以下命题给出了保证向量空间 X 的给定拓扑 $\mathcal{J}$ 使得 X 成为局部凸的拓扑向量空间的方便准则. 习题 46 给出了如何证明它的建议.

21. 命题　令 $\mathfrak{N}$ 为向量空间 X 的凸集族，那么以下条件是 $\mathfrak{N}$ 内集合的平移构成使得 X 成为局部凸的拓扑向量空间的拓扑的基的充分条件：

i. 若 $N\in\mathfrak{N}$，则 N 的每一点是内点.

ii. 对于属于 $\mathfrak{N}$ 的 N_1 和 N_2，存在属于 $\mathfrak{N}$ 的 N_3 满足 $N_3\subset N_1\cap N_2$.

iii. 若 N 属于 $\mathfrak{N}$，则对于每个满足 $0<|\alpha|<1$ 的 α 我们有 $\alpha N\in\mathfrak{N}$.

此外，每个局部凸的拓扑向量空间存在一个在 θ 点满足这些条件的基 $\mathfrak{N}$.　[240]

根据这个命题，向量空间 X 上的弱拓扑是由使得 X 成为局部凸的拓扑向量空间的线性泛函族生成. 赋范向量空间也是一个局部凸的拓扑向量空间.

22. 命题　令 X 为局部凸的拓扑向量空间，F 是一个闭凸子集，令 x_0 为 X 的不属于 F 的点，那么存在一个 X 上的连续线性泛函 f 使得

$$f(x_0) < \inf_{x \in F} f(x).$$

证明　通过平移 $-x_0$，我们可以将命题归结为 $x_0=\theta$ 的情形．由于 θ 不是 F 的闭包的点，因此存在一个凸开集 N 包含 θ 但不与 F 相交．令 $O=N\cap(-N)$，那么 O 是一个包含 θ 的凸开集且不与 F 相交，且 $-O=O$．由于 θ 是 O 的内点（见习题 44a），根据定理 20 存在一个非零线性泛函 f 使得 $\sup_{x\in O} f(x)\leqslant \inf_{y\in F} f(y)=\alpha$．因此对于属于 O 的 x，$f(x)\leqslant\alpha$，且由于 $x\in O$ 蕴涵 $-x\in O$，我们在 O 上有 $-f(x)\leqslant\alpha$，这就得到在 O 上有 $|f(x)|\leqslant\alpha$．因此对每个 $\varepsilon>0$，我们在集合 $O'=(\varepsilon\alpha^{-1})O$ 上有 $|f(x)|<\varepsilon$．但 O' 是包含 θ 的开集，因而 f 在 θ 连续．由于 f 线性且在 θ 连续，因而它处处连续．

剩下来仅需证明 $\alpha>0$．由于 f 是非零泛函，因而存在一个 x 使得 $f(x)>0$．由于 θ 是 O 的内部点，因此我们可以选取 $\lambda>0$ 使得 λx 属于 O，那么

$$0 < \lambda f(x) = f(\lambda x) \leqslant \alpha.$$ ■

23. 系　令 K 为局部凸的拓扑空间的凸集，那么 K 强闭当且仅当它弱闭．

24. 系　令 x 和 y 为局部凸的豪斯多夫向量空间 X 的不同点，那么存在一个连续线性泛函 f 使得 $f(x)\neq f(y)$．

令 K 为向量空间 X 的凸子集．点 x 属于 K 称为**极值点**，若它不是任何落在 K 的线段的内部点．因此 x 是极值点当且仅当 $x=\lambda y+(1-\lambda)z$，其中 $0<\lambda<1$，我们有 $y\notin K$ 或 $z\notin K$．我们将证明每个紧凸集有极值点，但首先考虑一些基本概念．凸集 K 的子集 S 称为 K 的支撑集，若它是闭的和凸的且具有下列性质：若 K 中的线段的内点属于 S，那么整条线段包含在 S 内．因此一个极值点是恰好由一点组成的支撑集．

241

25. 引理　令 f 为闭凸集 K 上的连续线性泛函，那么 f 在 K 上取到它的最大值的点集 S 是 K 的支撑集．

证明　集合 S 是凸的，这是因为若 $f(x)=m$ 且 $f(y)=m$，那么 $f(\lambda x+(1-\lambda)y)=m$．若连接 x 和 y 的线段属于 K 且 f 在点 $z=\lambda x+(1-\lambda)y$ 取到它的最大值 m，那么 $m=\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$，且由于 $f(x)$ 和 $f(y)$ 不大于 m，因此我们必有 $f(x)=f(y)=m$．但这蕴涵 $f(\mu x+(1-\mu)y)=m$，因此连接 x 与 y 的整条线段包含于 S 内． ■

所有包含集合 E 的凸集的交集是一个凸集，它包含 E 且包含于每个包含 E 的凸集．这个集合称为 E 的**凸包**．所有包含 E 的闭凸集的交集是一个闭凸集，它包含 E 且包含于每个包含 E 的闭凸集．这个集合称为 E 的**闭凸包**．

26. 定理（克赖因-米尔曼）　令 K 为局部凸的拓扑向量空间 X 的紧凸子集．那么 K 是它的端点的闭凸包．

证明（凯利）　我们假定 K 非空．根据支撑集的定义，K 的支撑集簇的交是 K 的一个支撑集，且若 S 是 K 的支撑集，T 是 S 的支撑集，那么 T 是 K 的支撑集．

给定 K 的任何非空支撑集 S，K 的所有非空支撑集族在包含关系下是偏序，且根据豪斯多夫极大原理存在非空支撑集的最大线性序族 $\mathcal{S}$ 使得 S 在其内．由于 K 是紧的，因此 $\mathcal{S}$ 的所有

成员的交 T 非空且因此是 K 的一个非空支撑集. 此外，它是一个最小非空支撑集，这是因为若 T 包含一个支撑集，则族$\mathcal{S}$将不是最大的，因此任何支撑集包含一个极值最小非空支撑集. 242 现在一个最小非空支撑集只能有一点，这是因为若支撑集 S 包含不同的点 x 和 y，则存在一个连续线性泛函 f 使得 $f(x)>f(y)$，那么根据引理 25，f 取到其最大值的点的 S 的子集是 S 的支撑集，也因此是 K 的支撑集. 由于 K 是紧的，因此它是不包含 y 的 K 的非空支撑子集.

若一个支撑集恰好由一点组成，则该点必须是极值点. 因此我们已经证明每个非空支撑集包含一个端点.

由于使得一个线性泛函取到它的最大值的 K 的子集是非空支撑集，因此我们得出结论：K 上的连续线性泛函的最大值等于它在 K 的极值点的集合 E 上的最大值. 令 C 为 K 的极值点的闭凸包，且假定 $x\notin C$，则根据命题 22 存在一个连续线性泛函 f 使得 $f(x)>\max_{y\in C}f(y)=\max_{y\in K}f(y)$. 因此 $x\notin K$，且我们有 $K\subset C$. 因此 $K=C$. ■

习题

42. 令 A 为从向量空间 X 到向量空间 Y 的线性算子，那么 X 中的每个凸集(或线性流形)的像是 Y 中的凸集(或线性流形)，且 Y 中的凸集(或线性流形)的逆像是 X 中的凸集(或线性流形). 给出一个例子证明一个非凸集可以有一个凸的像.
43. 证明一个拓扑向量空间的凸集 K 的闭包是凸的.
44. a. 证明拓扑向量空间的子集的每个内部点是内点. [提示：用乘法的连续性.]
    b. 证明 $\mathbf{R}^n$ 中凸集的每个内点是一个内部点.
    c. 给出平面上有非内部点的内点的集合的一个例子.
    d. 若一个凸集有一个内部点，则每个内点是内部点.
    e. 令 X 为关于自身第二贝尔范畴的一个拓扑向量空间，那么若 X 的一个闭凸子集有一个内点，则它有一个内部点. 243
45. 令 K 为包含 θ 的凸集，且假定 x 是 K 的一个内点，那么对于某个 $\lambda>0$ 集合 $x+\lambda K$ 包含于 K. [提示：选取 $\lambda>0$ 使得 $(1-\lambda)^{-1}x$ 属于 K.]
46. 证明命题 21. [提示：若 N 是凸的，那么 $\frac{1}{2}N+\frac{1}{2}N\subset N$. 运用命题 14 和它的证明.]
47. **最强的局部凸拓扑.** 令 X 为向量空间，$\mathcal{B}$为所有包含 θ 的凸集 V 所组成的簇，使得对于每个 $x\in X$ 存在一个 $\alpha>0$ 满足 $\alpha x\in V$，那么$\mathcal{B}$是 X 上的局部凸拓扑的局部基，且这个拓扑比 X 上的任何其他的局部凸拓扑强.
48. a. 在 $L^p[0,1]$中，$1<p<\infty$，每个满足 $\|x\|=1$ 的 x 是单位球 $S=\{x:\|x\|\leqslant 1\}$ 的极值点.
    b. 在 $L^\infty[0,1]$中，单位球的极值点是那些几乎处处满足 $|x(t)|=1$ 的 x.
    c. $L^1[0,1]$的单位球无极值点.
    d. $L^1[0,1]$不是任何赋范线性空间的对偶.
    e. l^p 的单位球的极值点是什么?
    f. 对 X 是紧豪斯多夫空间，$C(X)$的单位球的极值点是什么? 证明 $C[0,1]$不是任何赋范

线性空间的对偶.

49. 令 X 为[0，1]上的所有可测实值函数组成的向量空间，根据通常的方式定义加法和数乘. 定义

$$\sigma(x)=\int_0^1\frac{|x(t)|}{1+|x(t)|}\mathrm{d}t.$$

a. 我们有 $\sigma(x+y)\leqslant\sigma(x)+\sigma(y)$，因此若定义 $\rho(x, y)=\sigma(x-y)$，则 ρ 是 X 的度量.

b. 在这个度量中，$x_n\to x$ 当且仅当依测度 $x_n\to x$.

c. X 是一个完备度量空间(参见习题 4.25).

d. 加法是从 $X\times X$ 到 X 的连续映射.

e. 乘法是从 $\mathbf{R}\times X$ 到 X 的连续映射. [由于 X 是一个度量空间，因此仅需证明若 $x_n\to x$ 且 $\lambda_n\to\lambda$，则 $\lambda_n x_n\to\lambda x$. 这可由依测度收敛的有界收敛定理得到.]

f. 证明阶梯函数集合在 X 稠密.

g. 不存在 X 上的非零连续线性泛函. [证明存在一个 n 使得只要 x 是长度小于 $1/n$ 的区间的特征函数就有 $f(x)=0$. 因此 $f(x)=0$ 对所有阶梯函数 x 成立.]

[244]

h. 空间 X 是非局部凸的拓扑向量空间.

i. 令 s 为所有实数序列组成的空间，且定义

$$\sigma(\langle\xi_v\rangle)=\sum\frac{2^{-v}|\xi_v|}{1+|\xi_v|}.$$

证明(a)，(c)，(d)和(e)的类比. s 上的最一般的连续线性泛函是什么？

10.8　希尔伯特空间

谈到希尔伯特空间我们指的是定义了具有下列性质的 $H\times H$ 到 $\mathbf{R}$ 的函数 (x, y) 的巴拿赫空间 H[⊖]：

i. $(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2, y)=\alpha_1(x_1, y)+\alpha_2(x_2, y)$.

ii. $(x, y)=(y, x)$.

iii. $(x, x)=\|x\|^2$.

我们称 (x, y) 为 x 与 y 的内积. 我们立刻有希尔伯特空间的两个例子：一个是空间 $\mathbf{R}^n$ 具有内积

$$(x,y)=\sum_{i=1}^n x_iy_i.$$

另一个是空间 L^2 具有内积

$$(x,y)=\int x(t)y(t)\mathrm{d}t.$$

由于 $\|x\|\geqslant 0$ 且仅当 $x=\theta$ 等式成立，因而有

⊖ 这里我们已经定义了希尔伯特空间. 在分析中更便于使用的是复希尔伯特空间，即可用复数作数乘，内积是复值的，且将(ii)替换为(ii′)：$(x, y)=\overline{(y, x)}$.

$$0 \leqslant \| x - \lambda y \|^2 = (x - \lambda y, x - \lambda y)$$
$$= (x,x) - 2\lambda(x,y) + \lambda^2(y,y).$$

若 $\lambda > 0$，我们有

$$2(x,y) \leqslant \lambda^{-1} \| x \|^2 + \lambda \| y \|^2.$$

设 $\lambda = \| x \| / \| y \|$，我们得到

$$(x,y) \leqslant \| x \| \cdot \| y \|,$$

245

且可以看到等式仅当 $y=\theta$ 或对于某个 $\lambda \geqslant 0$，$x=\lambda y$ 时成立. 这个不等式即我们所知道的施瓦茨、柯西-施瓦茨或柯西-布尼亚科夫斯基-施瓦茨不等式. 这个不等式的一个推论是由 $f(x)=(x, y)$ 定义的线性泛函 f 以 $\| y \|$ 为界，从这可得出 (x, y) 是从 $H \times H$ 到 $\mathbf{R}$ 的连续函数.

我们说 H 的两个元素 x 和 y 正交，若 $(x, y)=0$. 我们写 $x \perp y$ 意味着 x 和 y 正交. 对于 H 的一个集合 $\mathcal{S}$，若 $\mathcal{S}$ 的任何两个不同元素 φ 和 ψ 正交，即 $(\varphi, \psi)=0$，则称之为一个*正交系*. 对于一个正交系 $\mathcal{S}$，若 $\mathcal{S}$ 的每个元素 φ 有 $\| \varphi \| =1$，则称它为*规范正交*. 规范正交系的任两个元素的距离为 $\sqrt{2}$. 因此若 H 可分，则 H 的每个规范正交系必可数.

今后我们将仅处理可分希尔伯特空间，因此每个规范正交系可表示为序列 $\langle \varphi_v \rangle$，该序列可以是有限的也可以是无限的. 我们定义 H 中的元素 x 的傅里叶系数(关于 $\langle \varphi_v \rangle$)为 $a_v = (x, \varphi_v)$. 对任何 n 我们有[⊖]

$$0 \leqslant \| x - \sum_{v=1}^{n} a_v \varphi_v \|^2 = \| x \|^2 - 2\sum_{v=1}^{n} a_v (x, \varphi_v) + \sum_{v=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{n} a_v a_\mu (\varphi_v, \varphi_\mu)$$
$$= \| x \|^2 - \sum_{v=1}^{n} a_v^2.$$

因此

$$\sum_{v=1}^{n} a_v^2 \leqslant \| x \|^2,$$

且由于 n 是任意的，因此我们有贝塞尔不等式

$$\sum_{v=1}^{\infty} a_v^2 \leqslant \| x \|^2.$$

另一方面，令 $\langle a_v \rangle$ 为任意实数序列满足 $\sum_{v=1}^{\infty} a_v^2 < \infty$，那么序列

$$z_n = \sum_{v=1}^{n} a_v \varphi_v$$

246

是一个柯西序列，这是由于对于 $m \geqslant n$，

$$z_m - z_n = \sum_{n+1}^{m} a_v \varphi_v,$$

⊖ 若 $\langle \varphi_v \rangle$ 内仅存在有限的 N 个元素，我们约定：对于 $N \leqslant n \leqslant \infty$，$\sum_{v=1}^{n}$ 意味着 $\sum_{v=1}^{N}$.

且我们有

$$\| z_m - z_n \|^2 = \sum_{n+1}^{m} a_v^2,$$

它必趋于零，这是由于$\sum a_v^2$收敛．根据H的完备性存在一个元素y使得$y = \lim z_n$，且我们写

$$y = \sum_{v=1}^{\infty} a_v \varphi_v.$$

由于内积是连续的，我们有

$$(y, \varphi_v) = \lim (z_n, \varphi_v) = a_v.$$

因此我们已经证明了对任意x存在形如$y = \sum_{v=1}^{\infty} a_v \varphi_v$的$y$，它具有与$x$相同的傅里叶系数．

什么时候y等于x？若我们考察$y-x$，可以看到它的所有傅里叶系数等零．因此$y=x$若规范正交系$\langle \varphi_v \rangle$具有性质：若对于所有的$v$有$(z, \varphi_v)=0$，则$z=\theta$．具有这个性质的规范正交系称为完备(或完全)．一个完备规范正交系显然是最大的，而若$\langle \varphi_v \rangle$是一个最大的规范正交系，则它必定是完备的．这是因为若对于所有v和$z \neq 0$，$(z, \varphi_v)=0$，则$z / \| z \|$可以添加到$\langle \varphi_v \rangle$．豪斯多夫极大原理蕴涵最大规范正交系的存在性，因此我们已经建立以下命题：

27. 命题 在一个可分希尔伯特空间中每个规范正交系是可数的且存在一个完备规范正交系．若$\langle \varphi_v \rangle$是任何完备规范正交系且$x$是$H$的任意元素，我们有

$$x = \sum_{v=1}^{\infty} a_v \varphi_v,$$

247 其中$a_v = (x, \varphi_v)$．此外，$\| x \|^2 = \sum_{v=1}^{\infty} a_v^2$．

在可分希尔伯特空间中有两种情形：或者每个完备规范正交系有无限个元素或存在一个具有有限的N个元素的完备规范正交系．在后一种情形中，根据命题27，这样的系是H的一个基(在向量空间意义下)．因此H是有限维向量空间，且任何$N+1$个元素的系线性相关．因此，每个规范正交系至多只能有N个元素，从这可得出每个完备正交系必须有N个元素．我们因此已经证明在可分希尔伯特空间H中每个完备规范正交系有相同个元素，我们称这个数为H的维数．(因此若H具有可数无限完备规范正交系，我们说$\dim H = \aleph_0$)．

从希尔伯特空间H映上希尔伯特空间H'的同构映射Φ是一个H映上H'的线性映射且使得$(\Phi x, \Phi y)=(x, y)$，因此希尔伯特空间之间的同构映射是一个等距映射．每个n维希尔伯特空间与$\mathbf{R}^n$同构，这是因为定义为$\Phi(x) = \langle a_1, \cdots, a_n \rangle$的映射(其中$a_v = (x, \varphi_v)$)是同构映射．类似地，每个$\aleph_0$维希尔伯特空间同构于$l^2$．由于$L^2[0, \pi]$是可分的且$\{\cos vt\}$是一个无限正交系，我们看到$L^2$的维数是$\aleph_0$，因而$L^2$同构于$l^2$．

28. 命题 令f为希尔伯特空间H上的有界线性泛函，那么惟一存在一个$y \in H$使得对于所有x有$f(x)=(x, y)$．此外，$\| f \| = \| y \|$．

证明 (我们仅考虑可分H的情形．对于不可分H见习题52.)令$\langle \varphi_v \rangle$为$H$的完备规范正交系，设$b_v = f(\varphi_v)$，那么对于每个$n$我们有

$$\sum_{v=1}^{n} b_v^2 = f\left(\sum_{v=1}^{n} b_v\varphi_v\right) \leqslant \| f \| \cdot \left\| \sum_{v=1}^{n} b_v\varphi_v \right\|$$

$$\leqslant \| f \| \left[\sum_{v=1}^{n} b_v^2\right]^{1/2}.$$

因此$\sum_{v=1}^{n} b_v^2 \leqslant \| f \|^2$，因而$\sum_{v=1}^{\infty} b_v^2 \leqslant \| f \|^2 < \infty$. 因此存在一个元素 $y = \sum_{v=1}^{\infty} b_v\varphi_v$，我们有 $\| y \| \leqslant \| f \|$.

248

令 x 为 H 的任意元素，那么$\sum_{v=1}^{n} a_v\varphi_v \to x$，因而

$$f(x) = \lim f\left(\sum_{v=1}^{n} a_v\varphi_v\right) = \lim \sum_{v=1}^{n} a_v b_v$$

$$= \sum_{v=1}^{\infty} a_v b_v$$

$$= (x, y).$$

根据施瓦茨不等式，$\| f \| \leqslant \| y \|$. ■

习题

50. 证明内积是连续的；即若 $x_n \to x$ 且 $y_n \to y$，则$(x_n, y_n) \to (x, y)$.

51. a. 证明$\{\cos vt, \sin vt\}$是$L^2[0, 2\pi]$的完备规范正交系（当适当地规范化时）（参见命题 6.8 和习题 9.42）.
    b. 证明 $L^2[0, 2\pi]$的每个函数是它的傅里叶级数的（2 阶）平均极限（参见 6.3 节）.

52. a. 证明对于不可分希尔伯特空间的每个 x 仅存在可数个非零的（关于某个固定的规范正交系）傅里叶系数.
    b. 证明在不可分希尔伯特空间内除每个完备规范正交系不可数外命题 27 仍然成立.
    c. 证明在不可分希尔伯特空间内命题 28 仍然成立.
    d. 证明若 H 是任何无限维希尔伯特空间，则 H 中的完备规范正交系的元素的个数 n 是使得存在具有 n 个元素的 H 的稠密子集的最小基数 n. 因此 H 的每个完备规范正交系有相同个元素，我们称这个数为 H 的维数.
    e. 证明两个希尔伯特空间同构当且仅当它们有相同的维数.
    f. 证明存在每一维数的希尔伯特空间.

53. 令 P 为 H 的子集. 谈到 P 的正交补集 $P^\perp$ 我们指的是集合$\{y$：对于所有 $x \in P$，$y \perp x\}$.
    a. 证明 $P^\perp$ 总是闭线性流形.
    b. 证明 $P^{\perp\perp}$是包含 P 的最小闭线性流形.

249

    c. 令 M 为闭线性流形，那么每个 $x \in H$ 能惟一写为 $x = y + z$ 的形式，其中 $y \in M$ 且 $z \in M^\perp$. 此外，

$$\| x \|^2 = \| y \|^2 + \| z \|^2.$$

54. 令$\langle x_n \rangle$为可分希尔伯特空间的元素的有界序列，那么$\langle x_n \rangle$包含一个弱意义下收敛的子序列.

55. 令S为$L^2[0, 1]$的子空间，且假定存在一个常数K使得对所有$x \in [0, 1]$，$|f(x)| \leqslant K\|f\|$，那么S的维数至多为K^2.［提示：若$\langle f_1, \cdots, f_n \rangle$是$S$内的任何有限规范正交序列，则

250

$$\sum_{i=1}^{n} |f_i(x)|^2 \leqslant K^2.］$$

第三部分

一般测度与积分论

第 11 章　测度与积分

11.1　测度空间

本章的目标是将勒贝格测度与勒贝格积分的最重要性质抽象化. 我们将给出勒贝格测度满足的某些公理且将积分理论建立在这些公理之上，因此我们的理论适用于所有满足这些给定公理的系统.

我们从回顾一个 σ 代数$\mathcal{B}$是给定的集合 X 的子集族开始，它是包含 ϕ 且关于补和可数并封闭的集族. 谈到集函数 μ 我们指的是将一个扩充的实数赋于某个集的函数. 有了这些概念我们做出以下定义：

定义　谈到可测空间我们指的是由集合 X 和 X 的子集的 σ 代数$\mathcal{B}$组成的一对$(X, \mathcal{B})$. 一个 X 的子集 A 称为可测(或关于$\mathcal{B}$可测)，若 $A\in\mathcal{B}$.

定义　谈到可测空间$(X, \mathcal{B})$的测度 μ，我们指的是对于$\mathcal{B}$的所有集合有定义且满足 $\mu(\varnothing)=0$ 与

253

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty}\mu E_i$$

对任意不相交可测集合序列 E_i 成立的非负集函数. 谈到测度空间$(X, \mathcal{B}, \mu)$我们指的是可测空间$(X, \mathcal{B})$与定义在$\mathcal{B}$上的测度 μ.

μ 的第二个性质常常指的是 μ 是可数加性的. 我们可以看到 μ 也是“有限加性的”；即对于属于$\mathcal{B}$的不相交集合 E_i，

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{N} E_i\right) = \sum_{i=1}^{N}\mu E_i,$$

这是因为对 $i>N$，我们可以设 $E_i=\varnothing$[⊖].

测度空间的一个例子是$(\mathbf{R}, \mathfrak{M}, m)$，其中 $\mathbf{R}$ 是实数集，$\mathfrak{M}$是实数的勒贝格可测集，而 m 是勒贝格测度. 若用区间$[0, 1]$代替且 $\mathbf{R}$ 且用$[0, 1]$的可测子集代替$\mathfrak{M}$，我们得到另一个测度空间. 第三个例子是$(\mathbf{R}, \mathcal{B}, m)$，其中$\mathcal{B}$是博雷尔集类且 m 仍然是勒贝格测度. 还有一个例子是计数测度(见习题 3.4). 以下是一个稍微使人迷惑的例子. 令 X 为任意不可数集，$\mathcal{B}$为那些或者是可数集或者是可数集的补集的子集族，那么$\mathcal{B}$是一个 σ 代数且我们可以在其上定义测度：对于每个可数集设 $\mu A=0$，对于每个补集为可数集的集合 B 设 $\mu B=1$.

测度的两个进一步的性质由以下命题给出：

1. 命题　若 $A\in\mathcal{B}$，$B\in\mathcal{B}$，且 $A\subset B$，则

$$\mu A \leqslant \mu B.$$

⊖ 一个定义在集代数且满足 $\mu(\varnothing)=0$ 与对于代数内的不相交集合 A 和 B 有 $\mu(A\cup B)=\mu A+\mu B$ 的集函数 μ 称为一个有限加性测度. 由于我们的定义(与通常的用法)要求测度是可数加性的，因而从定义可知一个有限加性测度一般不是一个测度，尽管每个测度是有限加性测度.

证明 由于

$$B = A \cup [B \sim A]$$

是不相交集合的并集，我们有

$$\mu B = \mu A + \mu(B \sim A) \geqslant \mu A.$$ ■ [254]

2. 命题 若 $E_i \in \mathcal{B}$，$\mu E_1 < \infty$ 且 $E_i \supset E_{i+1}$，则

$$\mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \lim_{n\to\infty} \mu E_n.$$

证明 设 $E = \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i$，那么

$$E_1 = E \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} (E_i \sim E_{i+1}),$$

且这是一个不相交集合的并集．因此

$$\mu E_1 = \mu E + \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i \sim E_{i+1}).$$

由于

$$E_i = E_{i+1} \cup (E_i \sim E_{i+1})$$

是不相交集合的并集，我们有

$$\mu(E_i \sim E_{i+1}) = \mu E_i - \mu E_{i+1}.$$

因此，

$$\begin{aligned}\mu E_1 &= \mu E + \sum_{i=1}^{\infty} (\mu E_i - \mu E_{i+1}) \\ &= \mu E + \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n-1} (\mu E_i - \mu E_{i+1}) \\ &= \mu E + \mu E_1 - \lim \mu E_n,\end{aligned}$$

这就得到命题． ■

3. 命题 若 $E_i \in \mathcal{B}$，则

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \mu E_i.$$

证明 令

$$G_n = E_n \sim \left[\bigcup_{i=1}^{n-1} E_i\right].$$

那么 $G_n \subset E_n$ 且集合 G_n 不相交．因此

$$\mu G_n \leqslant \mu E_n,$$ [255]

而

$$\mu(\cup E_i) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu G_n \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu E_n.$$ ■

一个测度 μ 称为**有限**，若 $\mu(X) < \infty$，它称为 **σ 有限**，若存在属于 $\mathcal{B}$ 的可测集序列 $\langle X_n \rangle$ 使得

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$$

且$\mu X_n < \infty$. 根据命题1.2我们总是可以取$\langle X_n \rangle$为不相交的集合序列. 有限测度的一个例子是$[0, 1]$上的勒贝格测度，而σ有限测度的一个例子是$(-\infty, \infty)$上的勒贝格测度，不可数集上的计数测度是一个非σ有限的测度. 习题48给出了其他例子.

一个集合E称为具有**有限测度**，若$E \in \mathcal{B}$且$\mu E < \infty$. 一个集合E称为具有**σ有限测度**，若E是可数的具有有限测度的可测集簇的并集. 任何包含于具有σ有限测度的集合的可测集本身具有σ有限测度，可数的具有σ有限测度的集簇的并集仍然具有σ有限测度. 若μ是σ有限，则每个可测集具有σ有限测度.

大致说来，几乎所有的勒贝格测度与勒贝格积分的熟知的性质对任意的σ有限测度成立，而且抽象测度理论的处理限制其本身于σ有限测度. 然而，一般理论的许多部分不要求σ有限这个假设，这个不必要的限制看起来不符合理论发展的需要. 比σ有限较弱的概念是半有限概念. 一个测度μ称为**半有限的**若每个具有无限测度的可测集合包含具有任意大的有限测度的可测集合. 因此每个σ有限测度是半有限的，而将一个不可数集X的可数子集赋予0而将不可数集赋予∞的测度不是半有限的. 非半有限的测度使人迷惑，人们尝试限制为仅考虑半有限测度. 遗憾的是，许多测度上的自然运算，例如下一章的延拓过程，使我们离开半有限测度类.

256

测度空间$(X, \mathcal{B}, \mu)$称为**完备的**，若$\mathcal{B}$包含所有零测度集的子集，即若$B \in \mathcal{B}$，$\mu B = 0$，且$A \subset B$蕴涵$A \in \mathcal{B}$. 因此勒贝格测度是完备的，而勒贝格测度限制于博雷尔集的σ代数不是完备的. 以下命题(其证明留给读者(习题7))表明每个测度空间可以通过添加零测度集的子集来完备化，该命题给出的测度空间$(X, \mathcal{B}_0, \mu_0)$称为$(X, \mathcal{B}, \mu)$的完备化.

4. 命题 若$(X, \mathcal{B}, \mu)$是一个测度空间，则我们可以找到完备测度空间$(X, \mathcal{B}_0, \mu_0)$使得

i. $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}_0$.

ii. $E \in \mathcal{B} \Rightarrow \mu E = \mu_0 E$.

iii. $E \in \mathcal{B}_0 \Leftrightarrow E = A \cup B$，其中$B \in \mathcal{B}$且$A \subset C$，$C \in \mathcal{B}$，$\mu C = 0$.

若$(X, \mathcal{B}, \mu)$是一个测度空间，我们说X的子集E局部可测，若对于每个$\mu B < \infty$的$B \in \mathcal{B}$有$E \cap B \in \mathcal{B}$. 局部可测集簇$\mathcal{C}$是一个包含$\mathcal{B}$的σ代数. 测度μ称为**饱和的**，若每个局部可测集可测(即属于$\mathcal{B}$). 每个σ有限测度是饱和的. 一个测度总是可以延拓为饱和测度，然而与完备化过程不同，饱和过程不惟一确定：具有σ代数没有困难，因为我们简单地取所有局部可测集的σ代数$\mathcal{C}$，但测度μ常有不同的方法延拓到$\mathcal{C}$. 习题8给出了一些细节，在下一章我们将回到这一主题.

习题

1. 令$\{A_n\}$为可数可测集簇，那么

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \lim_{n \to \infty} \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right).$$

2. 令$\{(X_\alpha, \mathcal{B}_\alpha, \mu_\alpha)\}$为测度空间簇，且假定集合$\{X_\alpha\}$不相交，那么通过令$X = \bigcup X_\alpha$，$\mathcal{B} = \{B:$

$(\alpha)[B\cap X_\alpha\in\mathcal{B}_\alpha]\}$且定义 $\mu(B)=\sum\mu_\alpha(B\cap X_\alpha)$，我们可以构造一个新的测度空间(称为它们的并集).

a. 证明$\mathcal{B}$是 σ 代数.

b. 证明 μ 是一个测度.

c. 证明 μ 是σ 有限当且仅当除可数个 μ_α为零外，其余为 σ 有限. [257]

3. a. 假定 E_1和 $E_2\in\mathcal{B}$，证明 $\mu(E_1\Delta E_2)=0$ 蕴涵 $\mu E_1=\mu E_2$.

b. 证明若 μ 完备，则 $E_1\in\mathcal{B}$和 $\mu(E_1\Delta E_2)=0$ 蕴涵 $E_2\in\mathcal{B}$.

4. 令$(X,\mathcal{B},\mu)$是一个测度空间且 $Y\in\mathcal{B}$，令$\mathcal{B}_Y$ 是$\mathcal{B}$中的那些包含于 Y 的集合组成的集簇. 若 $E\in\mathcal{B}_Y$ 设 $\mu_Y E=\mu E$，那么$(Y,\mathcal{B}_Y,\mu_Y)$是一个测度空间，测度 μ_Y 称为 μ 对 Y 的**限制**.

5. 令$(X,\mathcal{B})$为可测空间.

a. 若 μ 和 v 是定义在$\mathcal{B}$上的测度，则在$\mathcal{B}$上定义为 $\lambda E=\mu E+vE$ 的集函数λ 也是一个测度，我们将 λ 记为$\mu+v$.

b. 若 μ 和 v 是$\mathcal{B}$上的测度且 $\mu\geqslant v$，则存在$\mathcal{B}$上的测度 λ 使得 $\mu=v+\lambda$.

c. 若 v 为σ 有限，则(b)中的测度 λ 是惟一的.

d. 证明一般测度 λ 不必惟一但总存在这样的最小的λ.

6. a. 证明每个 σ 有限测度是半有限的.

b. 证明每个测度 μ 是半有限测度 μ_1和仅取值为 0 和∞的测度 μ_2的和 $\mu_1+\mu_2$.

c. 测度 μ_1和 μ_2一般不惟一但总存在最小的 μ_1和对应于这个 μ_1的最小的 μ_2.

7. 证明命题 4. [首先证明由(iii)定义的族$\mathcal{B}_0$是一个 σ 代数. 若 $E\in\mathcal{B}_0$，证明对于所有使得 $E=A\cup B$ 的 $A\in\mathcal{B}$(其中 B 是零测度集的子集)，μA 相同. 用这个事实定义 μ_0且证明 μ_0是一个测度.]

8. a. 证明每个 σ 有限测度是饱和的.

b. 证明局部可测集簇是一个 σ 代数.

c. 令$(X,\mathcal{B},\mu)$为测度空间且$\mathcal{C}$为局部可测集的 σ 代数. 对于 $E\in\mathcal{C}$，若 $E\in\mathcal{B}$设 $\bar{\mu}E=\mu E$，若 $E\notin\mathcal{B}$设 $\bar{\mu}E=\infty$. 证明$(X,\mathcal{C},\bar{\mu})$是一个饱和测度空间.

d. 若 μ 是半有限且 $E\in\mathcal{C}$，设$\underline{\mu}E=\sup\{\mu B: B\in\mathcal{B},B\subset E\}$. 证明$(X,\mathcal{C},\underline{\mu})$是一个饱和测度空间且$\underline{\mu}$是 μ 的延拓. 给出一个例子说明 $\bar{\mu}$ 和$\underline{\mu}$ 可以不同.

9. σ 环与 σ 代数：一些作者倾向于在 σ 环$\mathcal{R}$上定义测度，即一个 X 的子集簇使得若A 和B 属于$\mathcal{R}$则 $A\sim B$ 也如此，且若$\langle A_n\rangle$是$\mathcal{R}$的序列则$\bigcup A_n$属于$\mathcal{R}$. 因此一个 σ 环$\mathcal{R}$是σ 代数当且仅当$X\in\mathcal{R}$. 以下给出了 σ 环与 σ 代数之间的一些关系：

a. 令$\mathcal{R}$为非σ代数的σ环，令$\mathcal{B}$为包含$\mathcal{R}$的最小σ代数，且设$\mathcal{R}'=\{E:\tilde{E}\in\mathcal{R}\}$，那么$\mathcal{B}=\mathcal{R}\cup\mathcal{R}'$且$\mathcal{R}\cap\mathcal{R}'=\varnothing$. [258]

b. 若 μ 是$\mathcal{R}$上的测度，定义$\mathcal{B}$上的$\bar{\mu}$ 为：若 $E\in\mathcal{R}$则 $\bar{\mu}E=\mu E$ 且若 $E\in\mathcal{R}'$则$\bar{\mu}E=\infty$，则$\bar{\mu}$ 是$\mathcal{B}$上的测度.

c. 定义$\mathcal{B}$上的$\underline{\mu}$ 为：若 $E\in\mathcal{R}$则$\underline{\mu}E=\mu E$ 且若 $E\in\mathcal{R}'$，

$$\underline{\mu}E=\sup\{\mu A: A\subset E,A\in\mathcal{R}\}$$

那么$\underline{\mu}$也是一个$\mathcal{B}$上的测度.

d. 更一般地，对于任何非负扩充的实数β定义$\mathcal{B}$上的μ_β为：若$E\in\mathcal{R}$则$\mu_\beta E=\mu E$且若$E\notin\mathcal{R}$则$\mu_\beta E=\underline{\mu}E+\beta$，那么$\mu_\beta$是$\mathcal{B}$上的测度.

e. 若v是任意在$\mathcal{R}$上与μ一致的$\mathcal{B}$上的测度，则对于某个$\beta\geqslant0$，$v=\mu_\beta$.

11.2 可测函数

抽象可测空间上的可测函数的概念与关于实变量函数的可测函数的概念基本相同，因此，若以下命题和定理的证明本质上与3.5节中相同，则我们叙述它们而略去证明. 读者应当去验证第3章中的证明可实施于抽象可测空间. 贯穿本节我们始终假定某个固定的可测空间$(X, \mathcal{B})$是给定的.

5. 命题 令f为定义在X上的扩充的实值函数，那么以下陈述等价：

i. $\{x: f(x)<\alpha\}\in\mathcal{B}$对于每个$\alpha$成立.

ii. $\{x: f(x)\leqslant\alpha\}\in\mathcal{B}$对于每个$\alpha$成立.

iii. $\{x: f(x)>\alpha\}\in\mathcal{B}$对于每个$\alpha$成立.

iv. $\{x: f(x)\geqslant\alpha\}\in\mathcal{B}$对于每个$\alpha$成立.

(见命题3.18.)

定义 定义在X上的扩充的实值函数f称为可测(或关于$\mathcal{B}$可测)，若命题5的任意一个陈述成立.

6. 定理 若c是常数且函数f和g可测，那么函数$f+c$，cf，$f+g$，$f\cdot g$和$f\vee g$也是可测的. 进一步地，若$\langle f_n\rangle$是可测函数序列，则$\sup f_n$，$\inf f_n$，$\overline{\lim} f_n$和$\underline{\lim} f_n$都是可测的.

259 (见命题3.19和定理3.20.)

谈到简单函数，如同前面的定义，我们指的是一个可测集E_i上的特征函数的有限线性组合

$$\varphi(x)=\sum_{i=1}^{n}c_i\chi_{E_i}(x)$$

7. 命题 令f为非负可测函数，那么存在一个简单函数序列$\langle\varphi_n\rangle$满足$\varphi_{n+1}\geqslant\varphi_n$使得$f=\lim\varphi_n$在$X$的每一点成立. 若$f$是定义在$\sigma$有限测度空间上的，则我们可以选取函数$\varphi_n$使得它们中的每一个在有限测度集外消失.

8. 命题 若μ是一个完备测度且f是一个可测函数，则几乎处处$f=g$蕴涵g可测.

(见命题3.21.)

集合$\{x: f(x)<\alpha\}$有时称为f的坐标集，它们随α增加而增加. 以下引理表明，给定一个随α增加的可测集簇$\{B_\alpha\}$，我们可以找到一个可测函数f在以下意义下有这些坐标集.

$$\{x:f(x)<\alpha\}\subset B_\alpha\subset\{x:f(x)\leqslant\alpha\}.$$

9. 引理 假定对于实数的稠密集D的每一个α，存在集合$B_\alpha\in\mathcal{B}$使得对于$\alpha<\beta$有$B_\alpha\subset B_\beta$，那么惟一存在X上的可测扩充的实值函数f使得在B_α上$f\leqslant\alpha$且在$X\sim B_\alpha$上$f\geqslant\alpha$.

证明 对于每个$x\in X$，定义

$$f(x)=\inf\{\alpha\in D: x\in B_\alpha\}$$

这里，如同通常的做法，$\inf\varnothing=\infty$. 若 $x\in B_\alpha$，则 $f(x)\leqslant\alpha$. 若 $x\notin B_\alpha$，则对于每个 $\beta<\alpha$，$x\notin B_\beta$，因而 $f(x)\geqslant\alpha$. 为证明 f 可测，我们取 $\lambda\in\mathbf{R}$ 且选择一个 D 中的序列 $\langle\alpha_n\rangle$ 满足 $\alpha_n<\lambda$ 且 $\lambda=\lim\alpha_n$. 那么

$$\{x: f(x)<\lambda\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}B_{\alpha_n}.$$

若 $f(x)<\lambda$，则 $f(x)<\alpha_n$ 对于某个 n 成立，因而 $x\in B_{\alpha_n}$. 若对于任意 n，$x\in B_{\alpha_n}$，那么 $f(x)\leqslant\alpha_n<\lambda$. 因此集合 $\{x: f(x)<\lambda\}$ 都可测，因而 f 可测. [260]

为证明 f 的惟一性，令 g 为任意满足在 B_α 上 $g\leqslant\alpha$ 与在 $\widetilde{B}_\alpha$ 上 $g\geqslant\alpha$ 的扩充的实值函数，那么 $x\in B_\alpha$ 蕴涵 $g(x)\leqslant\alpha$，因而

$$\{\alpha\in D: x\in B_\alpha\}\subset\{\alpha\in D:\alpha\geqslant g(x)\}.$$

由于 $g(x)<\alpha$ 蕴涵 $x\in B_\alpha$，我们有

$$\{\alpha\in D:\alpha>g(x)\}\subset\{\alpha\in D: x\in B_\alpha\}.$$

因为 D 的稠密性我们有

$$\begin{aligned}g(x)&=\inf\{\alpha\in D:\alpha>g(x)\}=\inf\{\alpha\in D:\alpha\geqslant g(x)\}\\&=\inf\{\alpha\in D: x\in B_\alpha\}=f(x).\end{aligned}$$ ■

先前的引理表明一个函数由它的坐标集惟一确定且这些坐标集可以取为任意递增的族 $\{B_\alpha\}$，假定我们对于满足 $f(x)=\alpha$ 的 x 是否属于 B_α 采取灵活的态度.

在实际运用中，我们常常必须处理可测函数类(在几乎处处相等下). 在这种情形中坐标集仅在模零集意义下定义；即在 B_α 上 $f(x)\geqslant\alpha$ 几乎处处成立而在 $\widetilde{B}_\alpha$ 上 $f(x)\leqslant\alpha$ 几乎处处成立的集合 $\{B_\alpha\}$. 对于一个集族 $\{B_\alpha\}$ 成为这种意义下的坐标集族，我们仅要求 $\{B_\alpha\}$ 几乎递增；即 $\mu\{B_\alpha\sim B_\beta\}=0$ 对于 $\beta>\alpha$ 成立，这是下面命题的内容. 在 11.6 节和第 15 章它被证明是有用的.

10. 命题 *假定对于实数的稠密集 D 的每一个 α 赋予一个集合 $B_\alpha\in\mathcal{B}$ 使得对于 $\alpha<\beta$，$\mu(B_\alpha\sim B_\beta)=0$，那么存在可测函数 f 使得在 B_α 上 $f\leqslant\alpha$ 几乎处处成立，而在 $X\sim B_\alpha$ 上 $f\geqslant\alpha$ 几乎处处成立. 若 g 是任意具有该性质的其他函数，则 $f=g$ 几乎处处成立.*

证明 令 C 为 D 的可数稠密子集，且对于属于 C 的满足 $\alpha<\beta$ 的 α 和 β 设 $N=\bigcup(B_\alpha\sim B_\beta)$，那么 N 是可数的零测度集的并集因而其自身也是零测度集. 令 $B'_\alpha=B_\alpha\cup N$，对 C 中满足 $\alpha<\beta$ 的 α 和 β 我们有

$$B'_\alpha\sim B'_\beta=(B_\alpha\sim B_\beta)\sim N=\varnothing.$$

因此 $B'_\alpha\subset B'_\beta$. 根据引理 9 存在一个可测函数 f 使得在 B'_γ 上 $f\leqslant\gamma$ 且在 $\widetilde{B}'_\gamma$ 上 $f\geqslant\gamma$. [261]

令 $\alpha\in D$，并选取 C 中的序列 $\langle\gamma_n\rangle$ 满足 $\alpha<\gamma_n$ 且 $\alpha=\lim\gamma_n$，那么

$$B_\alpha\sim B'_{\gamma_n}\subset(B_\alpha\sim B_{\gamma_n})$$

因此 $P=\bigcup\limits_n(B_\alpha\sim B'_{\gamma_n})$ 是可数的零集的并集因而是一个零集. 令 $A=\bigcap B'_{\gamma_n}$，那么在 A 上 $f\leqslant\inf\gamma_n=\alpha$，且 $A\sim B_\alpha\subset P$. 因此在 B_α 上 $f\leqslant\alpha$ 几乎处处成立. 类似的讨论表明在 $\widetilde{B}_\alpha$ 上 $f\geqslant\alpha$ 几乎处处成立.

令 g 为扩充的实值函数，对于每个 $\gamma\in C$，在 B_γ 上 $g\leqslant\gamma$ 几乎处处成立而在 $\widetilde{B}_\gamma$ 上 $g\geqslant\gamma$ 几

乎处处成立，那么在 B'_γ 上 $g\leqslant\gamma$ 而在 $\widetilde{B}'_\gamma$ 上除属于零集 Q_γ 的 x 外 $g\geqslant\gamma$. 因此 $Q=\bigcup Q_\gamma$ 是一个零集且我们必有 $f=g$ 在 $X\sim Q$ 上成立. ■

习题

10. 证明命题 7. [对于每个整数对 $\langle n,k\rangle$，令

$$E_{n,k}=\{x:k2^{-n}\leqslant f(x)<(k+1)2^{-n}\},\text{且设 }\varphi_n=2^{-n}\sum_{k=0}^{2^{2n}}k\chi_{E_{n,k}}.]$$

11. 证明命题 8，并证明它是错的，若“完备”一词略去.
12. 令 $\langle f_n\rangle$ 为可测函数序列其在除零测度集 E 外的点收敛于函数 f，那么若 μ 是完备的则 f 是可测函数.
13. a. 可测实值函数序列 $\langle f_n\rangle$ 称为依测度收敛于函数 f，若给定 $\varepsilon>0$，存在一个整数 N 和一个可测集 E(满足 $\mu E<\varepsilon$)使得

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$$

对于所有 $n\geqslant N$ 和所有 $x\notin E$ 成立. 证明若 f_n 依测度收敛于 f，则存在子序列 f_{n_k} 几乎处处收敛于 f.

b. 假定 $\langle f_n\rangle$ 是可测函数序列且每个 f_n 在固定的可测集 A 外消失，$\mu A<\infty$，假定对于几乎所有的 x，$f_n\to f$，那么 $\langle f_n\rangle$ 依测度收敛于 f.

c. 一个可测函数序列 f_n 称为是依测度的柯西序列，若给定 $\varepsilon>0$，存在一个整数 N 和一个可测集 E(满足 $\mu E<\varepsilon$)使得

$$|f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon$$

对于所有 n，$m\geqslant N$ 和所有 $x\notin E$ 成立. 证明若 $\langle f_n\rangle$ 是依测度的柯西序列，则存在一个函数 f 使得 $\langle f_n\rangle$ 依测度收敛于它.

262

14. 令 $(X,\mathcal{B},\mu)$ 为测度空间而 $(X,\mathcal{B}_0,\mu_0)$ 是它的完备化，那么函数 f 关于 $\mathcal{B}_0$ 可测当且仅当存在关于 $\mathcal{B}$ 可测的函数 g 使得 $f=g$ 几乎处处成立. 这里几乎处处指的是存在满足 $\mu E=0$ 的集合 $E\in\mathcal{B}$ 且在 $X\sim E$ 上 $f=g$. 注意这不要求集合 $\{x: f(x)\neq g(x)\}$ 属于 $\mathcal{B}$.
15. 令 D 为有理数而 f 为引理 9 的函数，根据集合 $\{B_\beta\}$ 表示集合 $\{x: f(x)<\alpha\}$，$\{x: f(x)\leqslant\alpha\}$，$\{x: f(x)=\alpha\}$.
16. 在一般测度空间的框架下证明叶果洛夫定理(习题 3. 30).

11.3　积分

第 4 章的许多定义与证明仅依赖于那些对抽象测度空间的任意测度也成立的勒贝格测度的性质，并划归到这种情形. 若 E 是可测集且 φ 是非负简单函数，我们定义

$$\int_E\varphi\,\mathrm{d}\mu=\sum_{i=1}^{n}c_i\mu(E_i\cap E),$$

其中

$$\varphi(x)=\sum_{i=1}^{n}c_i\chi_{E_i}(x).$$

容易看到积分的值与我们所用的 φ 的表示无关. 若 a 和 b 是正数且 φ 和 ψ 是非负简单函数，则

$$\int a\varphi + b\psi = a\int\varphi + b\int\psi.$$

令 f 为在有限测度的可测集 E 外恒等于零的有界可测函数，那么我们能够证明，正如同命题 4.3 中所述，$\inf\limits_{f\leqslant\psi}\int\psi = \sup\limits_{\varphi\leqslant f}\int\varphi$ 对于所有简单函数 φ 和 ψ 成立当且仅当对于某个可测函数 g，$f = g$ 几乎处处成立. 等价地，该等式成立当且仅当 f 关于 μ 的完备化 $\bar{\mu}$ 可测. 这个结果表明积分理论考虑的自然的函数类是关于 μ 的完备化 $\bar{\mu}$ 可测的函数类. 因此除非特别说明，在本章其余部分我们将假定 μ 是完备测度. 在以下各章，我们定义关于 μ 的积分为关于 μ 的完备化的积分. [263]

在第 4 章我们首先定义有界可测函数的积分，接着定义非负可测函数的积分为当 g 遍历所有在有限测度集外消失的有界可测函数时 $\int g\mathrm{d}\mu$ 的上确界. 遗憾的是，这个定义不太适用于非半有限的测度的情形. 因为若 $\mathcal{B} = \{X, \varnothing\}$ 且 $\mu(\varnothing) = 0$，$\mu X = \infty$，那么我们当然想要 $\int 1\mathrm{d}\mu = \infty$. 但是在有限测度集外消失的仅有的可测函数是 $g \equiv 0$，因此 $\sup\int g\mathrm{d}\mu = 0$. 为避免这种困难性，我们直接根据非负简单函数的积分定义非负可测函数的积分.

定义　令 f 为测度空间 $(X, \mathcal{B}, \mu)$ 上的非负扩充的实值可测函数，那么 $\int f\mathrm{d}\mu$ 是当 φ 遍历所有满足 $0 \leqslant \varphi \leqslant f$ 的简单函数时积分 $\int\varphi\mathrm{d}\mu$ 的上确界.

从定义立刻得出 $f \leqslant g$ 蕴涵 $\int f \leqslant \int g$ 且 $\int cf = c\int f$. 然而在其他方面，这个定义显得不适用，这是因为我们对一大类简单函数簇取上确界，不能从定义立刻得出 $\int(f+g) = \int f + \int g$. 因此，我们首先从建立收敛定理开始对积分的讨论. 于是，这使得我们通过对任意收敛于 f 的简单函数的递增序列 $\langle\varphi_n\rangle$ 取 $\int\varphi_n$ 的极限来确定 $\int f$ 的值. 我们从法图引理开始：

11. 定理（法图引理）　令 $\langle f_n\rangle$ 为集合 E 上几乎处处收敛于函数 f 的非负可测函数组成的序列，那么

$$\int_E f \leqslant \underline{\lim}\int_E f_n.$$

证明　不失一般性，我们可以假定对于每个 $x \in E$，$f_n(x) \to f(x)$. 根据 $\int f$ 的定义仅需证明若 φ 是满足 $\varphi \leqslant f$ 的非负简单函数，则 $\int_E\varphi \leqslant \underline{\lim}\int_E f_n$.

若 $\int_E\varphi = \infty$，则存在一个可测集 $A \subset E$（满足 $\mu A = \infty$）使得在 A 上 $\varphi > a > 0$. 设 $A_n = \{x \in E: f_k(x) > a$ 对于所有 $k \geqslant n$ 成立$\}$，那么 $\langle A_n\rangle$ 是递增可测集序列其并集包含 A，这是由于 $\varphi \leqslant \lim f_n$. 因此 $\lim \mu A_n = \infty$. 由于 $\int_E f_n \geqslant a\mu A_n$，我们有 $\lim\int_E f_n = \infty = \int_E\varphi$. [264]

若$\int_E \varphi < \infty$，则集合$A = \{x \in E: \varphi(x) > 0\}$是具有有限测度的可测集. 令$M$为$\varphi$的最大值，$\varepsilon$为给定的正数，且设

$$A_n = \{x \in E: f_k(x) > (1-\varepsilon)\varphi(x) \text{ 对所有 } k \geqslant n\}.$$

那么$\langle A_n \rangle$是一个其并集包含A的递增集合序列，因而$\langle A \sim A_n \rangle$是交集为空的递减集合序列. 根据命题2，$\lim \mu(A \sim A_n) = 0$，因而我们能找到一个$n$使得$\mu(A \sim A_k) < \varepsilon$对于所有$k \geqslant n$成立. 因此对于$k \geqslant n$，

$$\begin{aligned}\int_E f_k \geqslant \int_{A_k} f_k &\geqslant (1-\varepsilon)\int_{A_k} \varphi \\ &\geqslant (1-\varepsilon)\int_E \varphi - \int_{A \sim A_k} \varphi \\ &\geqslant \int_E \varphi - \varepsilon\left[\int_E \varphi + M\right].\end{aligned}$$

因此

$$\underline{\lim}\int_E f_n \geqslant \int_E \varphi - \varepsilon\left[\int_E \varphi + M\right].$$

由于ε是任意的，因此

$$\underline{\lim}\int_E f_n \geqslant \int_E \varphi. \qquad \blacksquare$$

12. 单调收敛定理　令$\langle f_n \rangle$为几乎处处收敛于函数f的非负可测函数的序列且假定对于所有n，$f_n \leqslant f$，那么

$$\int f = \lim \int f_n.$$

证明　由于$f_n \leqslant f$，因此有$\int f_n \leqslant \int f$. 因此根据法图引理我们有

$$\int f \leqslant \underline{\lim}\int f_n \leqslant \overline{\lim}\int f_n \leqslant \int f. \qquad \blacksquare$$

265

我们现在可以建立积分的一些标准性质.

13. 命题　若f和g是非负可测函数且a和b是非负常数，则

$$\int af + bg = a\int f + b\int g.$$

我们有

$$\int f \geqslant 0,$$

等式成立仅当$f=0$几乎处处成立.

证明　为证明第一个陈述，令$\langle \varphi_n \rangle$和$\langle \psi_n \rangle$为收敛于$f$和$g$的简单函数的递增序列，那么$\langle a\varphi_n + b\psi_n \rangle$为收敛于$af+bg$的简单函数的递增序列. 根据单调收敛定理，

$$\begin{aligned}\int af + bg &= \lim \int a\varphi_n + b\psi_n \\ &= \lim\left(a\int \varphi_n + b\int \psi_n\right)\end{aligned}$$

$$= a\int f + b\int g.$$

显然$\int f \geqslant 0$. 若$\int f = 0$, 令 $A_n = \{x: f(x) \geqslant 1/n\}$, 那么我们有 $f \geqslant (1/n)\chi_{A_n}$, 因而 $\mu A_n = \int \chi_{A_n} = 0$. 由于使 $f > 0$ 的集合是集合 A_n 的并集, 因此它的测度为零. ■

将这个命题与单调收敛定理相结合，我们得到下面的系：

14. 系 令$\langle f_n \rangle$为非负可测的函数序列，那么

$$\int \sum_{n=1}^{\infty} f_n = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n.$$

对于非负函数 f(在一个关于 μ 的可测集合 E 上)，若它可测且

$$\int_E f \mathrm{d}\mu < \infty.$$

则我们称它为**可积**.

266

对于任意函数 f，若 f^+ 和 f^- 都可积，则我们称 f 为可积. 在这种情形中我们定义

$$\int_E f = \int_E f^+ - \int_E f^-.$$

以下命题包含了积分的一些性质，其证明留给读者.

15. 命题 若 f 和 g 是可积函数且 E 是可测集，则

i. $\int_E (c_1 f + c_2 g) = c_1 \int_E f + c_2 \int_E g$.

ii. 若 $|h| \leqslant |f|$ 且 h 可测，则 h 可积.

iii. 若 $f \geqslant g$ 几乎处处成立，则$\int f \geqslant \int g$.

16. 勒贝格收敛定理 令 g 在 E 上可积，且假定$\langle f_n \rangle$是可测函数序列使得在 E 上

$$|f_n(x)| \leqslant g(x)$$

且在 E 上几乎处处有

$$f_n(x) \to f(x).$$

那么

$$\int_E f = \lim \int_E f_n.$$

证明 将法图引理运用于序列 $g + f_n$ 和 $g - f_n$. ■

习题

17. 证明命题 15.

18. 假设 μ 不完备，但若

$$\sup_{\varphi \leqslant f} \int_E \varphi \mathrm{d}\mu = \inf_{\psi \geqslant f} \int_E \psi \mathrm{d}\mu$$

对于所有简单函数 φ 和 ψ 成立时我们定义有界函数 f 在具有有限测度的集 E 上可积. 证明 f 可积当且仅当它关于 μ 的完备化可测.

19. 令 f 为测度空间$(X, \mathcal{B}, \mu)$上的可积函数. 证明给定 $\varepsilon > 0$，存在一个 $\delta > 0$ 使得对于每个

267　满足 $\mu E<\delta$ 的可测集 E 我们有

$$\left|\int_E f\right|<\varepsilon.$$

20. 证明在这些收敛定理中几乎处处收敛可被依测度收敛代替(见习题 13).

21. a. 证明若 f 可积，则集合 $\{x: f(x)\neq 0\}$ 是 σ 有限测度集.
    b. 证明若 f 可积，$f\geqslant 0$，则对于某个在有限测度集外消失的递增的简单函数序列 $\langle\varphi_n\rangle$，$f=\lim\varphi_n$.
    c. 证明若 f 关于 μ 可积，则给定 $\varepsilon>0$，存在简单函数 φ 使得

$$\int|f-\varphi|\,\mathrm{d}\mu<\varepsilon.$$

22. a. 令 $(X,\mathcal{B},\mu)$ 为测度空间且 g 为 X 上的非负可测函数，设 $vE=\int_E g\,\mathrm{d}\mu$. 证明 v 是 $\mathcal{B}$ 上的测度.
    b. 令 f 为 X 上的非负可测函数，那么

$$\int f\mathrm{d}v=\int fg\,\mathrm{d}\mu.$$

[提示：首先对当 f 是简单函数的情形建立这个等式接着运用单调收敛定理.]

23. 在测度空间 $(X,\mathcal{B},\mu)$ 上的函数 f 称为局部可测，若 f 对每个 $\mathcal{B}$ 内满足 $\mu E<\infty$ 的 E 的限制可测，即若 $f\chi_E$ 可测.
    a. 证明 f 局部可测当且仅当它关于局部可测集的 σ 代数可测.
    b. 令 μ 是 σ 有限测度. 定义非负局部可测函数 f 的积分 $\int f$ 为 φ 遍历所有小于 f 的简单函数时 $\int\varphi$ 的上确界，那么 $\int f=\int f\mathrm{d}\underline{\mu}$，其中 $\underline{\mu}$ 是习题 8d 给出的测度 μ 的延拓.

11.4　一般收敛定理

前面一节我们讨论了收敛函数序列的积分的行为，这些积分都是关于某个固定测度 μ 的积分，我们能够把它们推广到允许测度也变化的情形. 令 $(X,\mathcal{B})$ 为可测空间且 $\langle\mu_n\rangle$ 是一个定义在 $\mathcal{B}$ 上的集函数序列，我们说 μ_n 集合态地收敛于集函数 μ，若对于每个 $E\in\mathcal{B}$ 有 $\mu E=\lim\mu_n E$. 有了这个概念，我们有以下两个命题，它们推广了法图引理和勒贝格收敛定理.

268

17. 命题　令 $(X,\mathcal{B})$ 为可测空间，$\langle\mu_n\rangle$ 为集合态地收敛于测度 μ 的测度序列，且 $\langle f_n\rangle$ 是点态地收敛于函数 f 的非负可测函数序列，那么

$$\int f\mathrm{d}\mu\leqslant\underline{\lim}\int f_n\mathrm{d}\mu_n.$$

证明　μ_n 集合态地收敛于 μ 蕴涵

$$\int\varphi\mathrm{d}\mu=\lim\int\varphi\mathrm{d}\mu_n$$

对于任意简单函数 φ 成立. 从 $\int f$ 的定义可知仅需证明对于任何简单函数 $\varphi\leqslant f$，$\int\varphi\mathrm{d}\mu\leqslant\underline{\lim}\int f_n\mathrm{d}\mu_n$ 成立.

假定$\int\varphi d\mu<\infty$，那么 φ 在有限测度集 E 外消失. 令 ε 为正数，且设

$$E_n=\{x:f_k(x)\geqslant(1-\varepsilon)\varphi(x)\text{ 对所有 }k\geqslant n\}.$$

那么$\langle E_n\rangle$是递增的集合序列且其并集包含 E，因此$\langle E\sim E_n\rangle$是递减可测集合序列且其交集为空集. 因此根据命题 2 存在一个 m 使得 $\mu(E\sim E_m)<\varepsilon$. 由于 $\mu(E\sim E_m)=\lim\mu_k(E\sim E_m)$，我们可以选取 $n\geqslant m$ 使得 $\mu_k(E\sim E_m)<\varepsilon$ 对于 $k\geqslant n$ 成立. 由于 $E\sim E_k\subset E\sim E_m$，对于 $k\geqslant n$ 我们有 $\mu_k(E\sim E_k)<\varepsilon$. 因此

$$\begin{aligned}\int f_k d\mu_k&\geqslant\int_{E_k}f_k d\mu_k\geqslant(1-\varepsilon)\int_{E_k}\varphi d\mu_k\\&\geqslant(1-\varepsilon)\int_E\varphi d\mu_k-\int_{E\sim E_k}\varphi d\mu_k\\&\geqslant(1-\varepsilon)\int_E\varphi d\mu_k-M\varepsilon,\end{aligned}$$

其中 M 是 φ 的最大值. 因此

269

$$\underline{\lim}\int f_k d\mu_k\geqslant\int_E\varphi d\mu-\varepsilon\left[M+\int\varphi d\mu\right].$$

由于 ε 是任意的，

$$\int_E\varphi d\mu\leqslant\underline{\lim}\int f_k d\mu_k.$$

当$\int\varphi d\mu=\infty$ 的情形可类似地处理. ■

18. 命题　令$\langle X,\mathcal{B}\rangle$为可测空间且$\langle\mu_n\rangle$是一个$\mathcal{B}$上的集合态地收敛于测度 μ 的测度序列，令$\langle f_n\rangle$和$\langle g_n\rangle$为两个可测函数序列，并点态地收敛于 f 和 g. 假定 $|f_n|\leqslant g_n$ 且

$$\lim\int g_n d\mu_n=\int g d\mu<\infty.$$

那么

$$\lim\int f_n d\mu_n=\int f d\mu.$$

证明　将命题 17 运用于序列 g_n+f_n和 g_n-f_n. ■

习题

24. 令$\langle X,\mathcal{B}\rangle$为可测空间，$\langle\mu_n\rangle$为$\mathcal{B}$上的测度序列使得对于每个 $E\in\mathcal{B}$，$\mu_{n+1}E\geqslant\mu_n E$. 令 $\mu E=\lim\mu_n E$，那么 μ 是$\mathcal{B}$上的测度.
25. 给出一个可测空间上的递减测度序列$\langle\mu_n\rangle$使得定义为 $\mu E=\lim\mu_n E$ 的集函数 μ 不是一个测度.
26. 令$(X,\mathcal{B})$为可测空间，$\langle\mu_n\rangle$为$\mathcal{B}$上集合态地收敛于集函数 μ 的测度序列. 若 $\mu X<\infty$，则 μ 是一个测度.

11.5　带号测度

本节考虑若允许一个测度既可取正值又可取负值是否可能得到新结果. 我们首先注意到若

[270] μ_1和μ_2是定义在相同可测空间$(X, \mathcal{B})$上的两个测度，则我们可以在$(X, \mathcal{B})$上定义一个新的测度μ_3如下：

$$\mu_3(E) = c_1\mu_1(E) + c_2\mu_2(E) \quad c_1, c_2 \geqslant 0.$$

若试着定义一个测度为

$$vE = \mu_1 E - \mu_2 E?$$

则会发生什么呢?

首先可能出现的是v不总是非负，这导致对带号测度的考虑，我们在以后将定义它. 更为严重的困难来自于当$\mu_1 E = \mu_2 E = \infty$时$v$无定义这一事实. 为此我们应当有$\mu_1$或$\mu_2$有限. 带着这个考虑，我们做出以下定义：

定义 谈到一个可测空间$(X, \mathcal{B})$上的带号测度我们指的是对所有$\mathcal{B}$的集合定义的扩充的实值集函数v，它满足下列条件：

i. v至多取到值$+\infty$，$-\infty$中的一个.

ii. $v(\varnothing)=0$.

iii. $v\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} vE_i$对于任意不相交的可测集序列$E_i$成立，取等式意味着若$v(\bigcup E_i)$有限则右边级数绝对收敛，而在其他情形它适当发散.

因此测度是带号测度的特殊情形，但一个带号测度一般不是一个测度. 我们说一个集合A关于带号测度v是**正集**，若A可测且对A的每个可测子集E有$vE \geqslant 0$. 正集的每个可测子集仍然是正集，且若我们取v到正集的限制则得到一个测度. 类似地，一个集合B称为负集，若它是可测的且它的每个可测子集具有非正v测度. 一个关于v既是正集又是负集的集合称为**零集**. 一个可测集是零集当且仅当它的每个可测子集的v测度为零. 读者必须仔细区分零集和测度为零的集合：每个零集测度必须为零，一个测度为零的集合可以是两个测度不为零但符号相反的集合之并集. 类似地，一个正集不应与仅仅具有正测度的集合混淆. 我们有以下关于正集的引理. 当然，类似的陈述对负集成立.

[271] **19. 引理** 正集的每个可测子集是正集. 可数正集簇的并集是正集.

证明 根据正集的定义第一个陈述平凡成立. 为证明第二个陈述，令A为正集序列$\langle A_n \rangle$的并集. 若E是A的任何可测子集，设

$$E_n = E \cap A_n \cap \widetilde{A}_{n-1} \cap \cdots \cap \widetilde{A}_1.$$

那么E_n是A_n的可测子集因而$vE_n \geqslant 0$. 由于E_n不相交且$E = \bigcup E_n$，我们有

$$vE = \sum_{n=1}^{\infty} vE_n \geqslant 0.$$

因此A是正集. ■

20. 引理 令E为使得$0 < vE < \infty$的可测集，那么存在一个包含于E的正集A满足$vA > 0$.

证明 或者E本身是正集或者它包含负测度集. 后一种情形中令n_1为使得存在一个可测集$E_1 \subset E$满足

$$vE_1 < -\frac{1}{n_1}.$$

的最小正整数．依次类推，若 $E\sim\bigcup_{j=1}^{k-1}E_k$ 还不是一个正集，令 n_k 为使得存在一个可测集 E_k 满足

$$E_k\subset E\sim\left[\bigcup_{j=1}^{k-1}E_j\right]$$

与

$$vE_k<-\frac{1}{n_k}.$$

的最小正整数．若我们设

$$A=E\sim\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k,$$

272

那么

$$E=A\cup\left[\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k\right].$$

由于这是一个不相交集的并集，我们有

$$vE=vA+\sum_{k=1}^{\infty}vE_k$$

由于 vE 有限，因此右边的级数绝对收敛．因此 $\sum 1/n_k$ 收敛，且我们有 $n_k\to\infty$．由于 $vE_k\leqslant 0$ 且 $vE>0$，我们必有 $vA>0$．

为证明 A 是正集，令 $\varepsilon>0$ 给定．由于 $n_k\to\infty$，我们可以选取 k 充分大使得 $(n_k-1)^{-1}<\varepsilon$．由于

$$A\subset E\sim\left[\bigcup_{j=1}^{k}E_j\right],$$

因此 A 不能包含测度小于 $-(n_k-1)^{-1}$ 的可测集，$-(n_k-1)^{-1}$ 大于 $-\varepsilon$．因此 A 不能包含测度小于 $-\varepsilon$ 的可测集．由于 ε 是任意正数，因此 A 不能包含负测度集，因而必须是正集．■

21. 命题(哈恩分解定理)　令 v 为可测空间 $(X,\mathcal{B})$ 上的带号测度，那么存在一个正集 A 和一个负集 B 使得 $X=A\cup B$ 且 $A\cap B=\varnothing$．

证明　不失一般性，我们可以假定 $+\infty$ 是 v 取不到的无限值，令 λ 为遍历所有关于 v 为正的集合 A 时 vA 的上确界．由于空集是正的，因此 $\lambda\geqslant 0$．令 $\langle A_i\rangle$ 为正集序列使得

$$\lambda=\lim_{i\to\infty}vA_i,$$

且设

$$A=\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i.$$

根据引理 19 集合 A 是正集，因而 $\lambda\geqslant vA$．但 $A\sim A_i\subset A$ 因而 $v(A\sim A_i)\geqslant 0$．因此

$$vA=vA_i+v(A\sim A_i)\geqslant vA_i.$$

273

因此 $vA\geqslant\lambda$，因而 $vA=\lambda$，且 $\lambda<\infty$．

令 $B=\sim A$，且假设 E 是 B 的正子集，那么 E 和 A 不相交且 $E\cup A$ 是一个正集．因此

$$\lambda\geqslant v(E\cup A)=vE+vA=vE+\lambda,$$

由于 $0\leqslant\lambda<\infty$，这就得到 $vE=0$. 因此 B 不包含正测度的正子集，从而根据引理 20B 不包含正测度的子集. 因此，B 是一个负集. ■

将 X 分解为两个不相交集合 A 和 B 使得 A 对于 v 正且 B 对于 v 负称为对于 v 的**哈恩分解**. 命题 21 叙述的是对于每个带号测度哈恩分解的存在性. 遗憾的是，哈恩分解不惟一.

若$\{A, B\}$是对于 v 的一个哈恩分解，则我们可以定义如下的两个测度 v^+ 和 v^- 满足 $v=v^+-v^-$.

$$v^+(E)=v(E\cap A)$$

和

$$v^-(E)=-v(E\cap B).$$

对于$(X, \mathcal{B})$上的两个测度 v_1 和 v_2，若存在两个不相交可测集合 A 和 B(满足 $X=A\cup B$)使得 $v_1(A)=v_2(B)=0$，则说它们为相互奇异(用记号 $v_1\perp v_2$ 表示). 因此如上定义的测度 v^+ 和 v^- 相互奇异. 因此我们已经建立了以下命题的存在性部分，其惟一性部分留给读者.

22. 命题 *令 v 为可测空间$(X, \mathcal{B})$上的带号测度，那么$(X, \mathcal{B})$上存在两个互相奇异的测度 v^+ 和 v^- 使得 $v=v^+-v^-$. 此外，仅存在一对这样互相奇异的测度.*

该命题中给出的 v 的分解称为 v 的**若尔当分解**. 测度 v^+ 和 v^- 称为 v 的正部和负部(或变差). 由于 v 至多取到值$+\infty$和$-\infty$中的一个，因此或者 v^+ 或者 v^- 必须有限. 若它们都有限，则称 v 为有限带号测度.

定义为

274

$$|v|(E)=v^+E+v^-E$$

的测度 $|v|$ 称为 v 的**绝对值**或**全变差**. 一个集合 E 对于 v 是正的，若 $v^-E=0$. 它是零集，若 $|v|(E)=0$.

习题

27. a. 给出一个例子说明哈恩分解不必惟一.
    b. 证明哈恩分解除零集外惟一.
28. 证明仅存在一对互相奇异的测度 v^+ 和 v^- 使得 $v=v^+-v^-$. [提示：证明任何这样的对确定一个哈恩分解并运用习题 27b 的结果.]
29. 证明若 E 是任意可测集，则
    $$-v^-E\leqslant vE\leqslant v^+E$$
    且
    $$|vE|\leqslant|v|(E).$$
30. 证明若 v_1 和 v_2 是任意两个有限带号测度，则 $\alpha v_1+\beta v_2$ 也是有限带号测度，其中 α 和 β 是实数. 证明
    $$|\alpha v|=|\alpha||v|$$
    且
    $$|v_1+v_2|\leqslant|v_1|+|v_2|,$$
    其中 $v\leqslant\mu$ 指的是对于所有可测集 E，$vE\leqslant\mu E$.

31. 我们定义关于带号测度 v 的积分为

$$\int f\mathrm{d}v = \int f\mathrm{d}v^{+} - \int f\mathrm{d}v^{-}.$$

若 $|f| \leqslant M$，则

$$\left|\int_E f\mathrm{d}v\right| \leqslant M|v|(E).$$

此外，存在可测函数 f 满足 $|f| \leqslant 1$ 使得

$$\int_E f\mathrm{d}v = |v|(E).$$

32. a. 令 μ 和 v 为有限带号测度. 证明存在一个带号测度 $\mu\wedge v$ 它小于 μ 和 v 但大于任何小于 μ 和 v 的其他带号测度. [提示：用事实 $\mu\wedge v=\frac{1}{2}(\mu+v-|\mu-v|)$.]

275

b. 证明存在一个测度 $\mu\vee v$ 它大于 μ 和 v 但小于任何大于 μ 和 v 的其他测度. 也有

$$\mu\vee v+\mu\wedge v=\mu+v.$$

c. 若 μ 和 v 是正测度，则它们相互奇异当且仅当 $\mu\wedge v=0$.

11.6 拉东-尼柯迪姆定理

令$(X, \mathcal{B})$为一个固定可测空间. 若 μ 和 v 是定义在$(X, \mathcal{B})$上的两个测度，我们说 μ 和 v **相互奇异**(写为 $\mu\perp v$)，若存在属于$\mathcal{B}$的不相交集合 A 和 B 使得 $X=A\cup B$ 且 $vA=\mu B=0$. 尽管事实上奇异的概念在 v 和 μ 是对称的，但我们有时说一个测度 v 关于 μ 奇异. 与奇异性对立的概念是绝对连续性一个测度 v 称为关于测度 μ **绝对连续**，若对于使 $\mu A=0$ 的每个集合 A，$vA=0$. 我们用记号$v\ll\mu$表示一个测度 v 关于 μ 绝对连续.

在 μ 和 v 为带号测度的情形中，若 $|v|\ll|\mu|$ 我们说 $v\ll\mu$，而若 $|\mu|\perp|v|$ 我们说 $\mu\perp v$.

只要我们处理可测空间$(X, \mathcal{B})$上多于一个的测度时，术语"几乎处处"意义不清楚，且我们必须具体说关于 μ 几乎处处或关于 v 几乎处处，等等，这些通常简写为 a. e. [μ]和 a. e. [v]. 若$v\ll\mu$且性质 a. e. [μ]成立，则它 a. e. [v]成立.

令 μ 为测度，f 是 X 上的非负可测函数. 对于属于$\mathcal{B}$的 E，设

$$vE = \int_E f\mathrm{d}\mu.$$

那么 v 是定义在$\mathcal{B}$上的集函数，且根据系 14，v 是可数加性的，因此它是一个测度. 测度 v 有限当且仅当 f 可积. 由于 μ 测度为零的集上的积分是零，因此有 v 关于 μ 绝对连续. 下一个定理表明，在 σ 有限的限制下，每个绝对连续的测度 v 可用这种方式得到.

23. 定理(拉东-尼柯迪姆) *令$(X, \mathcal{B}, \mu)$为 σ 有限测度空间，且令 v 为定义在$\mathcal{B}$上关于 μ 绝对连续的测度，那么存在一个非负可测函数 f 使得对于每个属于$\mathcal{B}$的集合 E 我们有*

276

$$vE = \int_E f\mathrm{d}\mu.$$

函数 f 在以下意义下惟一：若 g 是任意具有这个性质的可测函数，则 $g=f$ a. e. [μ].

证明　从有限推广到σ有限的情形不困难我们将它留给读者，因此我们假定μ有限，那么对于每个有理数α，$v-\alpha\mu$是一个带号测度．令(A_α, B_α)为$v-\alpha\mu$的哈恩分解，且取$A_0=X$，$B_0=\varnothing$.

现在$B_\alpha \sim B_\beta = B_\alpha \cap A_\beta$．因此$(v-\alpha\mu)(B_\alpha \sim B_\beta) \leqslant 0$，且因此$(v-\beta\mu)(B_\alpha \sim B_\beta) \geqslant 0$．若$\beta > \alpha$，这些蕴涵着$\mu(B_\alpha \sim B_\beta)=0$，因而根据命题10，存在一个可测函数$f$使得对于每个有理数$\alpha$，在$A_\alpha$上我们有$f \geqslant \alpha$ a. e. 而在B_α上有$f \leqslant \alpha$ a. e.．由于$B_0=\varnothing$，我们可以取f为非负.

令E是$\mathcal{B}$内的任意集合，且设

$$E_k = E \cap (B_{(k+1)/N} \sim B_{k/N}), \quad E_\infty = E \sim \bigcup B_{k/N}.$$

那么$E=E_\infty \cup \bigcup_{k=0}^{\infty} E_k$，且这是不相交模零集的并集．因此

$$vE = vE_\infty + \sum_{k=0}^{\infty} vE_k.$$

由于$E_k \subset B_{(k+1)/N} \cap A_{k/N}$，因此在$E_k$上我们有$\frac{k}{N} \leqslant f \leqslant \frac{k+1}{N}$，因而

$$\frac{k}{N}\mu E_k \leqslant \int_{E_k} f \, d\mu \leqslant \frac{k+1}{N}\mu E_k.$$

由于$\frac{k}{N}\mu E_k \leqslant vE_k \leqslant \frac{k+1}{N}\mu E_k$，我们有

$$vE_k - \frac{1}{N}\mu E_k \leqslant \int_{E_k} f \, d\mu \leqslant vE_k + \frac{1}{N}\mu E_k.$$

[277] 在E_∞上我们有$f=\infty$ a. e.．若$\mu E_\infty > 0$，我们必有$vE_\infty = \infty$，这是因为对于每个α，$(v-\alpha\mu)E_\infty$是正的．若$\mu E_\infty = 0$，我们有$vE_\infty = 0$，这是由于$v \ll \mu$．在这两种情形中都有

$$vE_\infty = \int_{E_\infty} f \, d\mu.$$

这个等式与我们先前的不等式相加得到

$$vE - \frac{1}{N}\mu E \leqslant \int_E f \, d\mu \leqslant vE + \frac{1}{N}\mu E.$$

由于μE有限且N任意，我们必须有

$$vE = \int_E f \, d\mu. \qquad \blacksquare$$

定理23给出的函数f称为v关于μ的**拉东-尼柯迪姆导数**，它有时记为$[dv/d\mu]$.

24. 命题（勒贝格分解）　*令$(X, \mathcal{B}, \mu)$为σ有限测度空间且v是定义在$\mathcal{B}$上的σ有限测度，那么我们能找到一个关于μ奇异的测度v_0和一个关于μ绝对连续的测度v_1，使得$v=v_0+v_1$．测度v_0和v_1是惟一的.*

证明　由于μ和v是σ有限测度，因此测度$\lambda=\mu+v$也是σ有限测度．由于μ和v都关于λ绝对连续，因此拉东-尼柯迪姆定理断言存在非负可测函数f和g使得对于每个$E \in \mathcal{B}$

$$\mu E = \int_E f \, d\lambda, \qquad vE = \int_E g \, d\lambda.$$

令$A=\{x: f(x)>0\}$，$B=\{x: f(x)=0\}$，那么X是A和B的不相交的并集，$\mu B=0$．若我

们定义 v_0 为

$$v_0 E = v(E \cap B),$$

则有 $v_0(A)=0$ 因而 $v_0 \perp \mu$. 令

$$v_1(E) = v(E \cap A) = \int_{E\cap A} g\,\mathrm{d}\lambda.$$

那么 $v=v_0+v_1$，且我们仅需证明 $v_1 \ll \mu$. 令 E 为 μ 测度为零的集合，那么

$$0 = \mu E = \int_E f\,\mathrm{d}\lambda,$$

278

且在 E 上 $f=0$ a. e. $[\lambda]$. 由于在 $A\cap E$ 上 $f>0$，因而必有 $\lambda(A\cap E)=0$. 因此 $v(A\cap E)=0$，因而 $v_1(E)=v(A\cap E)=0$. 这就建立了命题(除惟一性外，我们将其证明留给读者). ■

习题

33. a. 证明有限测度 μ 的拉东-尼柯迪姆定理蕴涵 σ 有限测度 μ 的拉东-尼柯迪姆定理. [提示：将 X 分解为具有有限 μ 测度的集合 X_i 的可数并集且对于每个 X_i 运用拉东-尼柯迪姆定理以得到 f. 证明 f 具有所要求的性质.]

    b. 证明拉东-尼柯迪姆定理的函数 f 是惟一的.

34. 拉东-尼柯迪姆导数. 令 μ，v，λ 为 σ 有限，证明拉东-尼柯迪姆导数 $[\mathrm{d}v/\mathrm{d}\mu]$ 具有以下性质：

    a. 若 $v \ll \mu$ 且 f 是非负可测函数，则

    $$\int f\,\mathrm{d}v = \int f\left[\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\mu}\right]\mathrm{d}\mu.$$

    b. $\left[\dfrac{\mathrm{d}(v_1+v_2)}{\mathrm{d}\mu}\right]=\left[\dfrac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}\mu}\right]+\left[\dfrac{\mathrm{d}v_2}{\mathrm{d}\mu}\right]$.

    c. 若 $v \ll \mu \ll \lambda$，则

    $$\left[\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\lambda}\right]=\left[\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\mu}\right]\left[\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\lambda}\right].$$

    d. 若 $v \ll \mu$ 且 $\mu \ll v$，则

    $$\left[\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\mu}\right]=\left[\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}v}\right]^{-1}.$$

35. a. 证明若 v 是使得 $v\perp\mu$ 且 $v\ll\mu$ 的带号测度，则 $v=0$.

    b. 证明若 v_1 和 v_2 关于 μ 奇异，则 $c_1v_1+c_2v_2$ 关于 μ 奇异.

    c. 证明若 v_1 和 v_2 关于 μ 绝对连续，则 $c_1v_1+c_2v_2$ 关于 μ 绝对连续.

    d. 证明勒贝格分解的惟一性断言.

36. 推广拉东-尼柯迪姆定理到带号测度的情形.

279

37. 复测度. 将 σ 代数 $\mathcal{B}$ 中的每个集 E 赋予一个复数 vE 的集函数 v 称为一个复测度，若 $v\varnothing=0$ 且对于 $\mathcal{B}$ 内每个可数的不相交并集 $\bigcup E_i$ 我们有

    $$v\left(\bigcup E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} vE_i,$$

    其中右边绝对收敛.

a. 证明每个复测度 v 可表示为 $v=\mu_1-\mu_2+\mathrm{i}\mu_3-\mathrm{i}\mu_4$，其中 μ_1，μ_2，μ_3 和 μ_4 是有限测度.

b. 证明对于每个复测度 v 存在一个测度 μ 和一个复值可测函数 φ(满足 $|\varphi|=1$)使得对于每个属于 $\mathcal{B}$ 的 E，

$$vE=\int_E\varphi\mathrm{d}\mu.$$

[提示：运用拉东-尼柯迪姆定理于关于测度 $\mu_1+\mu_2+\mu_3+\mu_4$ 的测度 μ_i.]

c. 证明(b)中测度 μ 是惟一的且在 μ 测度为零的集合内 φ 惟一确定.

d. (b)中的测度 μ 称为 v 的全变差或绝对值，有时记为 $|v|$. 证明习题 31 的结果对复测度成立.

e. 若 v 是一个复测度满足 $|v|(X)=1$ 且 $v(X)=1$，则 v 是正的实测度.

38. **拉东-尼柯迪姆定理的另一证明**. 我们能给出一个独立于哈恩分解定理的拉东-尼柯迪姆定理的证明，该证明运用命题 10.28，它叙述的是对于希尔伯特空间 H 上的每一个有界线性泛函 F，存在一个属于 H 的 g 使得对于所有属于 H 的 f，$F(f)=(f, g)$. 这个证明归功于冯·诺依曼，证明细节概括如下：

a. 令 μ 和 v 为可测空间 $(X,\mathcal{B})$ 上的有限测度，且设 $\lambda=\mu+v$. 定义 $F(f)=\int f\mathrm{d}\mu$，那么 F 是 $L^2(\lambda)$ 上的有界线形泛函.

b. 函数 $g\in L^2(\lambda)$ 使得 $F(f)=(f, g)$ 具有性质 $0\leqslant g\leqslant 1$ 且

$$\mu(E)=\int_E g\,\mathrm{d}\lambda$$

280

$$v(E)=\int_E(1-g)\mathrm{d}\lambda.$$

c. 若 $v\ll\mu$，则 $\lambda\ll\mu$，且仅在 μ 测度为零的集合 $g=0$. 在这种情形中

$$\lambda(E)=\int_E g^{-1}\mathrm{d}\mu.$$

[提示：考虑习题 22.]

d. 若 $v\ll\mu$，则 $(1-g)g^{-1}$ 关于 μ 可积且

$$v(E)=\int_E(1-g)g^{-1}\mathrm{d}\mu.$$

39. 用以下例子说明拉东-尼柯迪姆定理中 μ 是 σ 有限的假设不可省略. 令 $X=[0,1]$，$\mathcal{B}$ 为 $[0,1]$ 的勒贝格可测子集类，且取 v 为勒贝格测度，μ 为 $\mathcal{B}$ 上的计数测度，那么 v 有限且关于 μ 绝对连续，但不存在函数 f 使得 $vE=\int_E f\mathrm{d}\mu$ 对于所有 $E\in\mathcal{B}$ 成立. 在哪一点定理 23 的证明对这个例子不适用?

40. **可分解测度**. 令 $(X, \mathcal{B}, \mu)$ 为测度空间. 对于 X 的一个不相交可测子集簇 $\{X_\alpha\}$，若对于每个 α 有 $\mu X_\alpha<\infty$ 以及若对每个可测集 E 有 $\mu E=0$ 使得 $\mu(E\cap X_\alpha)=0$ 对所有 α 成立，则我们称它为 μ 的**分解**. 对于一个测度 μ，若它有一个分解则我们称它为**可分解的**.

a. 若 $\{X_\alpha\}$ 是 μ 的分解，且 E 是任意可测集，则 $\mu E=\sum\mu(X_\alpha\cap E)$，其中 $\sum$ 的意义与习题 2.21 相同.

b. 若$\{X_\alpha\}$是完备测度μ的一个分解，则f局部可测当且仅当对于每个α，f对X_α的限制可测. 若f是X的非负局部可测函数，则

$$\int_X f\,\mathrm{d}\mu = \sum_\alpha \int_{X_\alpha} f\,\mathrm{d}\mu.$$

c. 令v关于μ绝对连续，且假定存在集簇$\{X_\alpha\}$既是μ又是v的分解，那么存在一个非负、局部可测实值函数f使得对于每个可测集E我们有

281

$$vE = \int_E f\,\mathrm{d}\mu.$$

d. 若我们不假设$\{X_\alpha\}$为v的分解而仅假设若$E\in\mathcal{B}$且对于所有α，$v(E\cap X_\alpha)=0$则$vE=0$，则(c)的结论仍然成立.

11.7 L^p 空间

若$(X,\mathcal{B},\mu)$是一个完备测度空间，我们用$L^p(\mu)$表示所有满足$\int |f|^p\mathrm{d}\mu<\infty$的$X$上的可测函数组成的空间，考虑$L^p$中的两个函数等价，若它们几乎处处相等. 如同第 6 章，我们定义$L^\infty(\mu)$为有界可测函数空间. 对于$1\leqslant p<\infty$我们设

$$\| f\|_p = \left\{\int |f|^p\mathrm{d}\mu\right\}^{1/p},$$

对于$p=\infty$我们设

$$\| f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup} |f|.$$

注意到空间$L^\infty(\mu)$依赖于μ的选择以确定范数和等价函数类，但这仅要求知道零测度集是什么.

如同第 6 章可得到闵可夫斯基不等式、赫尔德不等式与里斯-菲舍尔定理，我们用以下定理概括它们：

25. 定理 对于$1\leqslant p\leqslant\infty$，空间$L^p(\mu)$是巴拿赫空间，若$f\in L^p(\mu)$，$g\in L^q(\mu)$，其中$1/p+1/q=1$，那么$fg\in L^1(\mu)$且

$$\int |fg|\,\mathrm{d}\mu\leqslant \| f\|_p\| g\|_q.$$

以下命题是李特尔伍德第二原理的一个版本，其证明留给读者：

26. 命题 令$f\in L^p(\mu)$，$1\leqslant p<\infty$，那么给定$\varepsilon>0$，存在一个在一个有限测度集外消失的简单函数φ使得$\| f-\varphi\|_p<\varepsilon$.

根据赫尔德不等式每个$g\in L^q$用如下的方式定义了L^p上的线性泛函F：

282

$$F(f) = \int fg\,\mathrm{d}\mu,$$

且不难证明$\| F\| = \| g\|$. 在本节的剩余部分我们的目标是建立逆定理(里斯表示定理)，它叙述的是对于$1<p<\infty$，$L^p(\mu)$上的每个线性泛函具有这种形式，且若μ是σ有限的，则$L^1(\mu)$上的每个线性泛函具有这种形式. 我们从建立以下引理开始.

27. 引理 令$(X,\mathcal{B},\mu)$为有限测度空间且g为可积函数使得对于某个常数M，

$$\left|\int g\varphi \mathrm{d}\mu\right| \leqslant M \| \varphi \|_p$$

对于所有简单函数 φ 成立，那么 $g \in L^q$.

证明 假定 $p>1$，且令 $\langle \psi_n \rangle$ 为递增趋于 $|g|^q$ 的非负简单函数序列. 设

$$\varphi_n = (\psi_n)^{1/p} \operatorname{sgn} g.$$

那么 φ_n 是简单函数，且

$$\| \varphi_n \|_p = \left\{ \int \psi_n \mathrm{d}\mu \right\}^{1/p}.$$

由于 $\varphi_n g \geqslant |\varphi_n| \, |\psi_n|^{1/q} = |\psi_n|^{1/p+1/q} = \psi_n$，我们有

$$\begin{aligned} \int \psi_n \mathrm{d}\mu &\leqslant \int \varphi_n g \, \mathrm{d}\mu \\ &\leqslant M \| \varphi_n \|_p \\ &\leqslant M \left\{ \int \psi_n \mathrm{d}\mu \right\}^{1/p}. \end{aligned}$$

由于 $1-1/p=1/q$，因此

$$\left\{ \int \psi_n \mathrm{d}\mu \right\}^{1/q} \leqslant M$$

或

$$\int \psi_n \mathrm{d}\mu \leqslant M^q,$$

且根据单调收敛定理

$$\int |g|^q \mathrm{d}\mu \leqslant M^q.$$

283 $p=1$ 的情形留给读者. ■

我们将运用以下引理，其证明留给读者.

28. 引理 令 $\langle E_n \rangle$ 为不相交的可测集序列，且对于每个 n 令 f_n 为 $L^p(1 \leqslant p < \infty)$ 的函数其在 E_n 外消失. 设 $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$，那么 $f \in L^p$ 当且仅当 $\sum \| f_n \|^p < \infty$. 在这种情形 $f = \sum f_n$ 属于 L^p；即，

$$\| f - \sum_{i=1}^{n} f_i \|_p \to 0$$

且

$$\| f \|^p = \sum_{n=1}^{\infty} \| f_n \|^p.$$

29. 里斯表示定理 令 F 为 $L^p(\mu)$ 上的有界线性泛函，其中 $1 \leqslant p < \infty$，μ 为 σ 有限测度，那么惟一存在 L^q 的元素 g，其中 $1/q+1/p=1$，使得

$$F(f) = \int fg \, \mathrm{d}\mu.$$

我们也有 $\| F \| = \| g \|_q$.

证明 我们首先考虑 μ 为有限测度的情形，那么每个有界可测函数在 $L^p(\mu)$ 中. 定义可测

集上的集函数 v 为

$$vE = F(\chi_E).$$

若 E 是不相交的可测集序列 $\langle E_n \rangle$ 的并集，令 $\alpha_n = \operatorname{sgn} F(\chi_{E_n})$，且设 $f = \sum \alpha_n \chi_{E_n}$，则根据引理 28 和 F 的有界性，我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty} | vE_n | = F(f) < \infty$$

和

284

$$\sum_{n=1}^{\infty} vE_n = F(\chi_E) = vE.$$

因此 v 是一个带号测度且根据定义它关于 μ 绝对连续. 根据拉东-尼柯迪姆定理存在一个可测函数 g 使得对于每个可测集 E 我们有 $vE = \int_E g\,d\mu$. 由于 v 总是有限的，因此 g 是可积的.

若 φ 是一个简单函数，则 F 和积分的线性蕴涵

$$F(\varphi) = \int \varphi g\,d\mu.$$

由于左边以 $\| F \| \ \| \varphi \|_p$ 为界，根据引理 27 我们有 $g \in L^q$. 令 G 为定义为

$$G(f) = \int fg\,d\mu.$$

的 L^p 上的有界线性泛函，那么 $G-F$ 是一个有界线性泛函其在简单函数的子空间上消失. 根据命题 26，简单函数在 L^p 稠密，因而 $G-F=0$. 因此对于所有 $f \in L^p$，

$$F(f) = \int fg\,d\mu,$$

且容易证明 $\| F \| = \| G \| = \| g \|_q$.

函数 g 必须确定一个惟一的 L^q 的元素，这是因为若 g_1 和 g_2 确定相同的泛函 F，则 $g_1 - g_2$ 必给出零泛函，因而 $\| g_1 - g_2 \|_q = 0$. 因此 $g_1 = g_2$ 几乎处处成立.

为将定理推广到 σ 有限的情形，令 $\langle X_n \rangle$ 为递增有限测度的可测集序列，其并集为 X. 有限测度空间的定理蕴涵着对每个 n，存在一个函数 g_n 属于 L^q 使得 g_n 在 X_n 外消失，并且 $F(f) = \int fg_n d\mu$ 对所有在 X_n 处消失的 $f \in L^p$ 成立. 此外，$\| g_n \|_q \leqslant \| F \|$. 由于任意具有这一性质的函数 g_n 除在零测度集上改变外在 X_n 上惟一确定且由于 g_{n+1} 也具有这个性质，因此可以假定在 X_n 上 $g_{n+1} = g_n$. 对于 $x \in X_n$，设 $g(x) = g_n(x)$，那么 g 是良定义的可测函数且 $| g_n |$ 逐点地递增到 $| g |$，因此根据单调收敛定理

285

$$\int | g |^q d\mu = \lim \int | g_n |^q d\mu \\ \leqslant \| F \|^q,$$

且 $g \in L^q$.

对于 $f \in L^p$，在 X_n 上令 $f_n = f$，在 $\widetilde{X}_n$ 上令 $f_n = 0$，那么 f_n 点态地收敛于 f 且属于 L^p. 由于 $| fg |$ 可积且 $| f_n g | \leqslant | fg |$，因此勒贝格收敛定理给出

$$\begin{aligned}\int fg\,\mathrm{d}\mu &= \lim \int f_n g\,\mathrm{d}\mu \\ &= \lim \int f_n g_n\,\mathrm{d}\mu \\ &= \lim F(f_n) \\ &= F(f).\end{aligned}$$

■

若 $p=1$，则要求 μ 为 σ 有限是必要的. 习题 47 和 48 给出了一些推广和反例. 若 $p>1$，则 σ 有限不必要.

30. 定理 令 F 为 $L^p(\mu)$ 上的有界线性泛函且 $1<p<\infty$，那么存在惟一的元素 $g\in L^q$ 使得

$$F(f)=\int fg\,\mathrm{d}\mu.$$

我们有 $\|F\|=\|g\|_q$.

证明 根据前面的定理，若 E 是任何具有 σ 有限测度的可测集，则惟一存在 $g_E\in L^q$，其在 E 外消失，并使得对于每个在 E 外消失的 $f\in L^p$，有

$$F(f)=\int g_E f\,\mathrm{d}\mu$$

g_E的惟一性蕴涵着若 $A\subset E$,则在 A 上 $g_A=g_E$ a. e.. 对于每个具有 σ 有限测度的集合 E 设 $\lambda(E)=\int|g_E|^q\mathrm{d}\mu$,那么对于 $A\subset E$,我们有 $\lambda(A)\leqslant\lambda(E)\leqslant\|F\|^q$. 令 $\langle E_n\rangle$ 为 σ 有限测度集合的序列使得 $\lambda(E_n)$ 趋向于 λ 的最大值 m,那么 $H=\bigcup E_n$是具有 σ 有限测度的集合,且根据 λ 的单调性我们有 $\lambda(H)=m$.

286

令 g 定义为在 H 上为 g_H在其余点为 0,那么 $g\in L^q$. 若 E 是任何包含 H 的 σ 有限测度的集合,则在 H 上 $g_E=g_H$ a. e.. 但$\int|g_E|^q=\lambda(E)\leqslant\lambda(H)=\int|g_H|^q$,因而在 $E\sim H$ 上 $g_E=0$ a. e.. 因此在 E 上几乎处处 $g_E=g$.

若 $f\in L^p$，则集合 $N=\{x: f(x)\neq 0\}$是具有 σ 有限测度的集合，因而集合 $E=N\cup H$ 也如此. 因此

$$F(f)=\int fg_E\,\mathrm{d}\mu=\int fg\,\mathrm{d}\mu.$$

$\|F\|$ 与 $\|g\|_q$的相等性可如同前面定理得到. ■

习题

41. 证明命题 26.
42. 对 $p=1$ 的情形证明引理 27.
43. 证明若我们仅假定 μ 为 σ 有限，引理 27 仍然成立.
44. 证明引理 28.
45. 对于 $g\in L^q$，令 F 为如下定义的 L^p 上的线性泛函：

$$F(f)=\int fg\,\mathrm{d}\mu.$$

证明 $\|F\|=\|g\|_q$.

46. a. 令 μ 为可数集 X 上的计数测度，证明 $L^p(\mu)=l^p$.

b. 讨论空间 $l^p(X)=L^p(\mu)$，其中 μ 是不一定可数的集合 X 上的计数测度.

47. 令$(X, \mathcal{B}, \mu)$为可分解的测度空间(参考习题 40).

a. 证明对于 $L^1(\mu)$ 上的每一个有界线性泛函 F,存在一个有界局部可测函数 g 使得 $F(f)=\int fg\,d\mu$.

b. 证明 $L^1(\mu)$的对偶空间是 $L^\infty(\underline{\mu})$，其中$\underline{\mu}$是习题 8d 中给出的 μ 的饱和化测度.

48. 令 A 和 B 为具有不同数目元素的不可数集且令 $X=A\times B$，形如$\{\langle x, y\rangle: x=a\}$的集合称为垂直直线，形如$\{\langle x, y\rangle: y=b\}$的集合称为水平直线，令$\mathcal{B}$为 X 的子集 E 组成的簇，使得对于每条水平直线或者垂直直线 L 或者 $E\cap L$ 或者 $\tilde{E}\cap L$ 可数，那么$\mathcal{B}$是 σ 代数. 令 μE 为使得$\tilde{E}\cap L$可数的水平直线和垂直直线的数目，vE 为使得$\tilde{E}\cap L$可数的水平直线的数目，那么μ和v是$\mathcal{B}$上的测度，且我们能够通过设 $F(f)=\int f\,dv$ 定义$L^1(\mu)$ 上的有界线性泛函. 不存在局部可测函数 g 使得

$$F(f)=\int fg\,d\mu.$$

287

第 12 章　测度与外测度

本章我们首先考虑在 σ 代数上定义测度的某些方法．在勒贝格测度的情形我们定义开集的测度并用它来定义外测度，由此我们得到可测集与勒贝格测度的概念，这样的程序一般是可行的．12.1 节我们讨论从外测度导出测度的过程，12.2 节我们从仅定义在集合的代数上的测度导出外测度，本章的其余部分讨论这个过程的一些应用．

12.1　外测度与可测性

谈到外测度 μ^*，我们指的是定义在空间 X 的所有子集上的非负扩充的实值集函数，它具有下列性质：

i. $\mu^*\varnothing=0$.

ii. $A\subset B\Rightarrow\mu^*A\leqslant\mu^*B$.

iii. $E\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\Rightarrow\mu^*E\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}\mu^*E_i$.

[288] 第二条性质称为单调性而第三条性质称为可数次加性．注意到有限次加性(i)可由(iii)得到．由于(ii)，性质(iii)可替代为

iii. $E=\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i, E_i$不相交 $\Rightarrow\mu^*E\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}\mu^*E_i$.

若 $\mu^*E<\infty$我们称外测度 μ^* 有限．

类似于勒贝格测度的情形，我们定义一个集合 E 关于 μ^* **可测**，若对于每个集合 A 我们有

$$\mu^*(A)=\mu^*(A\cap E)+\mu^*(A\cap\widetilde{E}).$$

由于 μ^* 是次加性的，为证明 E 可测仅需证明

$$\mu^*(A)\geqslant\mu^*(A\cap E)+\mu^*(A\cap\widetilde{E})$$

对于每个 A 成立．当 $\mu^*A=\infty$这个不等式平凡成立，因此我们仅需对于满足 μ^*A 有限的集合 A 建立它．

1. 定理　μ^* 可测集类$\mathcal{B}$是一个 σ 代数．若 $\bar{\mu}$ 是 μ^* 在$\mathcal{B}$的限制，则 $\bar{\mu}$ 是$\mathcal{B}$上的完备测度．

证明　平凡地，空集是可测的．E 和 $\widetilde{E}$ 可测性定义的对称性表明，只要 E 可测就有 $\widetilde{E}$ 可测．

令 E_1和 E_2为可测集．根据 E_2的可测性

$$\mu^*(A)=\mu^*(A\cap E_2)+\mu^*(A\cap\widetilde{E}_2)$$

且根据 E_1的可测性

$$\mu^*(A)=\mu^*(A\cap E_2)+\mu^*(A\cap\widetilde{E}_2\cap E_1)+\mu^*(A\cap\widetilde{E}_1\cap\widetilde{E}_2)$$

由于

$$A\cap[E_1\cup E_2]=[A\cap E_2]\cup[A\cap E_1\cap\widetilde{E}_2],$$

根据次加性，我们有

$$\mu^*(A\cap[E_1\cup E_2])\leqslant\mu^*(A\cap E_2)+\mu^*(A\cap\widetilde{E}_2\cap E_1)$$

因而

$$\mu^* A \geqslant \mu^*(A \cap [E_1 \cup E_2]) + \mu^*(A \cap \widetilde{E}_1 \cap \widetilde{E}_2).$$

这意味着 $E_1 \cup E_2$ 可测，由于

$$\sim (E_1 \cup E_2) = \widetilde{E}_1 \cap \widetilde{E}_2.$$

因此两个可测集的并集是可测集，由归纳法，有限个可测集的并集是可测集，这表明$\mathcal{B}$是一个集合的代数.

289

假定 $E = \bigcup E_i$，其中$\langle E_i \rangle$是不相交可测集序列，且设

$$G_n = \bigcup_{i=1}^{n} E_i.$$

那么 G_n 可测，且由于 $\widetilde{E} \subset \widetilde{G}_n$，

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap G_n) + \mu^*(A \cap \widetilde{G}_n) \geqslant \mu^*(A \cap G_n) + \mu^*(A \cap \widetilde{E}),$$

现在 $G_n \cap E_n = E_n$，$G_n \cap \widetilde{E}_n = G_{n-1}$，且根据 E_n 的可测性我们有

$$\mu^*(A \cap G_n) = \mu^*(A \cap E_n) + \mu^*(A \cap G_{n-1}).$$

根据归纳

$$\mu^*(A \cap G_n) = \sum_{i=1}^{n} \mu^*(A \cap E_i),$$

因而

$$\begin{aligned} \mu^*(A) &\geqslant \mu^*(A \cap \widetilde{E}) + \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A \cap E_i) \\ &\geqslant \mu^*(A \cap \widetilde{E}) + \mu^*(A \cap E), \end{aligned}$$

由于

$$A \cap E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} (A \cap E_i).$$

因此 E 可测. 由于一个代数内的任何集合序列的并集可被该代数内的不相交的集合的并集代替，因此$\mathcal{B}$是一个 σ 代数.

我们接着说明 $\bar{\mu}$ 的有限加性. 令 E_1 和 E_2 为不相交的可测集，那么 E_2 的可测性蕴涵

$$\begin{aligned} \bar{\mu}(E_1 \cup E_2) &= \mu^*(E_1 \cup E_2) \\ &= \mu^*([E_1 \cup E_2] \cap E_2) + \mu^*([E_1 \cup E_2] \cap \widetilde{E}_2) \\ &= \mu^* E_2 + \mu^* E_1. \end{aligned}$$

由归纳得到有限加性.

若 E 是不相交的可测集序列$\{E_i\}$的并集，则

290

$$\bar{\mu}(E) \geqslant \bar{\mu}\left(\sum_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \bar{\mu}(E_i),$$

因而

$$\bar{\mu}(E) \geqslant \sum_{i=1}^{\infty} \bar{\mu}(E_i).$$

但根据 μ^* 的次加性

$$\bar{\mu}(E) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty}\bar{\mu}(E_i)$$

因此 $\bar{\mu}$ 是可数加性的，由于它是非负的且 $\bar{\mu}\varnothing=\mu^*\varnothing=0$，因此它是一个测度. ■

习题

1. 证明 $\bar{\mu}$ 的完备性.
2. 假设 $\langle E_i\rangle$ 为不相交的可测集序列且 $E=\bigcup E_i$，那么对于任意集 A，我们有

$$\mu^*(A\cap E)=\sum\mu^*(A\cap E_i).$$

12.2　延拓定理

谈到一个**代数上的测度**，我们指的是定义在集代数 $\mathfrak{A}$ 上的非负扩充的实值集函数 μ，它具有下列性质：

i. $\mu(\varnothing)=0$.

ii. 若 $\langle A_i\rangle$ 是 $\mathfrak{A}$ 中不相交的集合序列其并集也属于 $\mathfrak{A}$，则

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu A_i.$$

因此代数 $\mathfrak{A}$ 上的测度是一个测度当且仅当 $\mathfrak{A}$ 是一个 σ 代数. 本节的目标是要表明，若从集代数 $\mathfrak{A}$ 上的测度出发，我们可以把它延拓成定义在包含 $\mathfrak{A}$ 的 σ 代数上的测度. 我们实现这一目标的途径是：用这个代数的测度构造外测度 μ^* 并证明由 μ^* 诱导的测度 $\bar{\mu}$ 是合乎要求的 μ 的延拓. [291] 我们从 μ 构造 μ^* 的过程类似于从区间长度构造勒贝格外测度：我们定义

$$\mu^*E=\inf\sum_{i=1}^{\infty}\mu A_i, \tag{1}$$

其中 $\langle A_i\rangle$ 遍历 $\mathfrak{A}$ 中所有使得 $E\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$ 的序列. 我们首先建立一些关于 μ^* 的引理.

2. 引理　若 $A\in\mathfrak{A}$ 且 $\langle A_i\rangle$ 是 $\mathfrak{A}$ 中的任意集合序列使得 $A\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$，则 $\mu A\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}\mu A_i$.

证明　设

$$B_n=A\cap A_n\cap\widetilde{A}_{n-1}\cap\cdots\cap\widetilde{A}_1.$$

那么且 $B_n\in\mathfrak{A}$ 且 $B_n\subset A_n$. 但 A 是不相交的集合序列 $\langle B_n\rangle$ 的并集，因而根据可数加性

$$\mu A=\sum_{n=1}^{\infty}\mu B_n\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\mu A_n.$$ ■

3. 系　若 $A\in\mathfrak{A}$，则 $\mu^*A=\mu A$.

4. 引理　集函数 μ^* 是一个外测度.

证明　由于 μ^* 显然是一个对所有集定义且 $\mu^*\varnothing=0$ 的单调非负集函数，因此我们仅需证明它是可数加性的. 令 $E\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i$. 若对任何 i，$\mu^*E_i=\infty$，则有 $\mu^*E\leqslant\sum\mu^*E_i=\infty$. 若不是这样，则给定 $\varepsilon>0$，对于每个 i 存在一个 $\mathfrak{A}$ 中的集合序列 $\langle A_{ij}\rangle_{j=1}^{\infty}$ 使得 $E_i\subset\bigcup_{j=1}^{\infty}A_{ij}$ 且

$$\sum_{j=1}^{\infty}\mu A_{ij} < \mu^* E_i + \frac{\varepsilon}{2^i}.$$

那么

$$\mu^* E \leqslant \sum_{ij}\mu A_{ij} < \sum_{i=1}^{\infty}\mu^* E_i + \varepsilon.$$

292

由于 ε 是任意正数，因此

$$\mu^* E \leqslant \sum_{i=1}^{\infty}\mu^* E_i,$$

且 μ^* 是次加性的. ■

5. 引理　若 $A\in\mathfrak{A}$，则 A 关于 μ^* 可测.

证明　令 E 为具有有限外测度的任意集合且 ε 是一个正数，那么存在 $\mathfrak{A}$ 中的序列 $\langle A_i\rangle$ 使得 $E\subset\bigcup A_i$ 且

$$\sum\mu A_i<\mu^* E+\varepsilon.$$

根据 μ 在 $\mathfrak{A}$ 上的加性我们有

$$\mu(A_i) = \mu(A_i \cap A) + \mu(A_i \cap \widetilde{A}).$$

因此

$$\begin{aligned}\mu^* E + \varepsilon &> \sum_{i=1}^{\infty}\mu(A_i \cap A) + \sum_{i=1}^{\infty}\mu(A_i \cap \widetilde{A}) \\ &\geqslant \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap \widetilde{A}),\end{aligned}$$

这是由于

$$E \cap A \subset \bigcup (A_i \cap A)$$

及

$$E \cap \widetilde{A} \subset \bigcup (A_i \cap \widetilde{A}).$$

由于 ε 是任意正数，因此

$$\mu^* E \geqslant \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap \widetilde{A}),$$

因而 A 可测. ■

我们已经定义的外测度 μ^* 称为由 μ 诱导的外测度. 对于一个给定的集代数 $\mathfrak{A}$，我们用 $\mathfrak{A}_\sigma$ 表示那些 $\mathfrak{A}$ 的集合的可数并集且用 $\mathfrak{A}_{\sigma\delta}$ 表示那些 $\mathfrak{A}_\sigma$ 内集合的可数交集.

6. 命题　令 μ 为代数 $\mathfrak{A}$ 上的测度，μ^* 为由 μ 诱导的外测度，E 为任意集，那么对于 $\varepsilon>0$，存在一个集合 $A\in\mathfrak{A}_\sigma$ 满足 $E\subset A$ 且

$$\mu^* A \leqslant \mu^* E + \varepsilon.$$

293

也存在集合一个 $B\in\mathfrak{A}_{\sigma\delta}$ 满足 $E\subset B$ 且 $\mu^* E=\mu^* B$.

证明　根据 μ^* 的定义存在 $\mathfrak{A}$ 中的序列 $\langle A_i\rangle$ 使得 $E\subset\bigcup A_i$ 且

$$\sum_{i=1}^{\infty}\mu A_i \leqslant \mu^* E + \varepsilon.$$

设 $A=\bigcup A_i$，那么 $\mu^* A\leqslant\sum\mu^* A_i=\sum\mu A_i$.

为证明第二个陈述，我们注意到对于每个正整数 n 存在 $\mathcal{A}_\sigma$ 中的集合 A_n 满足 $E\subset A_n$ 且 $\mu^* A_n<\mu^* E+1/n$. 令 $B=\bigcap A_n$. 那么 $B\in \mathcal{A}_{\sigma\delta}$ 且 $E\subset B$. 由于 $B\subset A_n$，因此 $\mu^* B\leqslant\mu^* A_n<\mu^* E+1/n$. 由于 n 是任意的，因此 $\mu^* B\leqslant\mu^* E$. 但 $E\subset B$，因而根据单调性 $\mu^* B\geqslant\mu^* E$. 因此 $\mu^* B=\mu^* E$. ■

一个外测度 μ^* 称为正则的，若给定 X 的任意子集 E 和任意 $\varepsilon>0$，存在一个 μ^* 可测集 A 满足 $E\subset A$ 且

$$\mu^* A\leqslant\mu^* E+\varepsilon.$$

根据引理 5 和命题 6，每个由代数上的测度诱导的外测度是正则外测度.

若运用该命题于 E 是具有有限测度的可测集的情形，我们看到 E 必定是 $\mathcal{A}_{\sigma\delta}$ 中的集合 B 与零测度集的差. 这就给出了具有有限测度的可测集的结构，而下一个命题把它推广到 σ 有限的情形，它可以看成是李特尔伍德第一原理的推广，是证明我们的定理的关键元素. 习题 7 和 10 给出了这一原理的其他形式. 命题 11.7 和 11.26 以及习题 11、11.16 和 11.21c 给出了李特尔伍德其他原理的版本.

7. 命题 令 μ 为代数 $\mathcal{A}$ 上的 σ 有限测度，且令 μ^* 为由 μ 生成的外测度. 一个集合 E 是 μ^* 可测当且仅当它是 $\mathcal{A}_{\sigma\delta}$ 中的集合 A 与满足 $\mu^* B=0$ 的集合 B 的适当的差 $A\sim B$. 每个满足 $\mu^* B=0$ 的集合 B 包含于 $\mathcal{A}_{\sigma\delta}$ 中满足 $\mu^* C=0$ 的集合 C.

证明 命题的“当”部分由每个 $\mathcal{A}_{\sigma\delta}$ 中的集合必定可测的事实得到，这是由于可测集构成一个 σ 代数，而由于 $\bar{\mu}$ 完备因而每个 μ^* 测度为零的集合必可测.

294

为证明命题的“仅当”部分，令 $\{X_i\}$ 为 $\mathcal{A}$ 内的可数不相交集簇满足 μX_i 有限且 $X=\bigcup X_i$. 若 E 是可测的，则 E 是不相交可测集 $E_i=X_i\cap E$ 的并集. 根据命题 6，对于每个正整数 n，我们可以找到 $\mathcal{A}_\sigma$ 内的集合 A_{ni} 使得 $E_i\subset A_{ni}$ 且

$$\bar{\mu}A_{ni}\leqslant\bar{\mu}E_i+\frac{1}{n2^i}.$$

设

$$A_n=\bigcup_{i=1}^{\infty}A_{ni}.$$

那么 $E\subset A_n$，且 $A_n\sim E\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}[A_{ni}\sim E_i]$. 因此

$$\begin{aligned}\bar{\mu}(A_n\sim E)&\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}\bar{\mu}(A_{ni}\sim E_i)\\&\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{n2^i}=\frac{1}{n}.\end{aligned}$$

由于 $A_n\in\mathcal{A}_\sigma$，因此集合 $A=\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n$ 属于 $\mathcal{A}_{\sigma\delta}$，且对于每个 n

$$A\sim E\subset A_n\sim E.$$

因此

$$\bar{\mu}(A\sim E)\leqslant\bar{\mu}(A_n\sim E)\leqslant\frac{1}{n}.$$

由于这个不等式对于每个正整数 n 成立，我们必须有

$$\bar{\mu}(A \sim E) = 0. \qquad \blacksquare$$

我们把本节的结果概括成如下定理.

8. 定理(卡拉泰奥多里)　令 μ 为代数 $\mathcal{A}$ 上的测度，μ^* 为由 μ 诱导的外测度，那么 μ^* 到 μ^* 可测集的限制 $\bar{\mu}$ 是到一个 μ 到包含 $\mathcal{A}$ 的 σ 代数的延拓. 若 μ 有限(或 σ 有限)，则 $\bar{\mu}$ 也如此. 若 μ 是 σ 有限的，则 $\bar{\mu}$ 是包含 $\mathcal{A}$ 的最小 σ 代数上仅有的作为 μ 的延拓的测度.

证明　从系 3、引理 5 和定理 1 我们可直接得到 $\bar{\mu}$ 是 μ 从 $\mathcal{A}$ 到包含 $\mathcal{A}$ 的 σ 代数上的测度的延拓，容易证明只要 μ 有限或 σ 有限则 $\bar{\mu}$ 也是如此. [295]

为证明 μ 为 σ 有限时 $\bar{\mu}$ 的惟一性，我们令 $\mathcal{B}$ 为包含 $\mathcal{A}$ 的最小 σ 代数且 $\tilde{\mu}$ 是 $\mathcal{B}$ 上某个与 μ 在 $\mathcal{A}$ 一致的测度.

由于每个 $\mathcal{A}_\sigma$ 中的集合可以表示为 $\mathcal{A}$ 中可数个不相交集的并集，因此在 $\mathcal{A}_\sigma$ 上测度 $\tilde{\mu}$ 必与 $\bar{\mu}$ 一致. 令 B 为 $\mathcal{B}$ 中的任意具有有限外测度的集合，那么根据命题 6 存在属于 $\mathcal{A}_\sigma$ 的 A 满足 $B \subset A$ 且

$$\mu^* A \leqslant \mu^* B + \varepsilon.$$

由于 $B \subset A$，因此

$$\tilde{\mu} B \leqslant \tilde{\mu} A = \mu^* A \leqslant \mu^* B + \varepsilon.$$

由于 ε 是任意正数，对于每个 $B \in \mathcal{B}$ 我们有

$$\tilde{\mu} B \leqslant \mu^* B$$

由于关于 μ^* 可测的集类是一个包含 $\mathcal{A}$ 的 σ 代数，因此每个 $\mathcal{B}$ 内的 B 必可测. 若 B 可测且 A 属于 $\mathcal{A}_\sigma$ 满足 $B \subset A$ 及 $\mu^* A \leqslant \mu^* B + \varepsilon$，则

$$\mu^* A = \mu^* B + \mu^* (A \sim B),$$

因而若 $\mu^* B < \infty$，则

$$\tilde{\mu}(A \sim B) \leqslant \mu^* (A \sim B) \leqslant \varepsilon.$$

因此

$$\begin{aligned} \mu^* B \leqslant \mu^* A &= \tilde{\mu} A \\ &= \tilde{\mu} B + \tilde{\mu}(A \sim B) \\ &\leqslant \tilde{\mu} B + \varepsilon. \end{aligned}$$

由于 ε 是任意的，我们有

$$\mu^* B \leqslant \tilde{\mu} B$$

因而

$$\mu^* B = \tilde{\mu} B.$$

若 μ 是 σ 有限测度，令 $\{X_i\}$ 为 $\mathcal{A}$ 内的可数不相交集簇满足 $X = \bigcup X_i$ 且 μX_i 有限. 若 B 是 $\mathcal{B}$ 内的任意集，则

$$B = \bigcup (X_i \cap B)$$ [296]

且这是 $\mathcal{B}$ 内可数的不相交集合的并集，因而我们有

$$\tilde{\mu} B = \sum \tilde{\mu}(X_i \cap B)$$

及

$$\bar{\mu}B=\sum\bar{\mu}(X_i\cap B).$$

由于 $\mu^*(X_i\cap B)<\infty$，我们有

$$\bar{\mu}(X_i\cap B)=\tilde{\mu}(X_i\cap B).$$ ■

该延拓过程不仅把 μ 延拓到包含 $\mathcal{A}$ 的最小的 σ 代数 $\mathcal{B}$ 上的测度，而且完备化和饱和化该测度. 若 μ 是 σ 有限，则到 $\mathcal{B}$ 的延拓已经饱和化，且到 μ^* 可测集的延拓仅仅是 $\bar{\mu}$ 在 $\mathcal{B}$ 上的延拓的完备化. 若 μ 不是 σ 有限，则到 μ^* 可测集的延拓也饱和化 $\bar{\mu}$. 应该观察到在这种情形中 μ 到 $\mathcal{B}$ 的延拓不必惟一(习题 3)，虽然对于每个满足 $\bar{\mu}B<\infty$ 的 $\mathcal{B}$ 的集合 B 任何延拓 $\tilde{\mu}$ 必须与 $\bar{\mu}$ 一致，且我们总是有 $\tilde{\mu}B\leqslant\mu^*B$. 在 12.6 节和 12.7 节我们将回到延拓和惟一性问题.

从具有比集代数少的结构的集簇 $\mathcal{C}$ 上的集函数开始常常是方便的. 我们说 X 的一个子集簇 $\mathcal{C}$ 是集合的**半代数**，若 $\mathcal{C}$ 内的任两个集合的交集仍在 $\mathcal{C}$ 内且 $\mathcal{C}$ 内的任何集合的补集是 $\mathcal{C}$ 内有限的不相交集合的并集. 若 $\mathcal{C}$ 是任何集合的半代数，则由空集和所有 $\mathcal{C}$ 内的有限的不相交集合的并集组成的簇 $\mathcal{A}$ 是一个集合的代数，它称为由 $\mathcal{C}$ 生成的代数. 若 μ 是定义在 $\mathcal{C}$ 上的集函数，则只要 A 是 $\mathcal{C}$ 内的不相交的集合 E_i 的并集，就会自然地去尝试定义 $\mathcal{A}$ 上的有限加性集函数

$$\mu A=\sum_{i=1}^{n}\mu E_i$$

由于有多种方法把 $\mathcal{A}$ 内的集合 A 表示为 $\mathcal{C}$ 内的不相交的集合的并集，因此我们必须确定这样的程序导致 μA 的惟一值. 以下命题给出了在何条件下这个程序可以执行并给出代数 $\mathcal{A}$ 上的测度.

297

9. 命题　*令 $\mathcal{C}$ 为集合的半代数且 μ 是定义在 $\mathcal{C}$ 上的非负集函数满足 $\mu\varnothing=0$(若 $\varnothing\in\mathcal{C}$)，那么若满足以下条件：*

i. 若 $\mathcal{C}$ 内的集合 C 是 $\mathcal{C}$ 内的有限不相交集簇 $\{C_i\}$ 的并集，则 $\mu C=\sum\mu C_i$.

ii. 若 $\mathcal{C}$ 内的集合 C 是 $\mathcal{C}$ 内的可数不相交集簇 $\{C_i\}$ 的并集，则 $\mu C\leqslant\sum\mu C_i$.

则 μ 有到由 $\mathcal{C}$ 生成的代数 $\mathcal{A}$ 上的测度的惟一延拓.

习题

3. 令 X 为有理数集且 $\mathcal{A}$ 是形如 $(a, b]$ 的区间的有限并集的代数满足 $\mu(a, b]=\infty$ 与 $\mu\varnothing=0$，证明 μ 到包含 $\mathcal{A}$ 的最小 σ 代数的延拓不惟一.
4. 通过证明以下结论证明命题 9：
   a. 条件(i)蕴涵着，若 A 是 $\mathcal{C}$ 内的两个有限不相交集簇 $\{C_i\}$ 和 $\{D_j\}$ 每一个的并集，则 $\sum\mu C_i=\sum\mu D_j$. [提示：$\mu C_i=\sum_j\mu(C_i\cap D_j)$.]
   b. 条件(ii)蕴涵 μ 在 $\mathcal{A}$ 上是可数加性的. (因为有限加性和单调性已经蕴涵反不等式).
5. 令 $\mathcal{C}$ 为集合的半代数且 $\mathcal{A}$ 为包含 $\mathcal{C}$ 的最小集代数.
   a. 证明 $\mathcal{A}$ 由形如 $A=\bigcup_{i=1}^{n}C_i$ 的集合组成，其中 $C_i\in\mathcal{C}$.
   b. 证明 $\mathcal{A}_\sigma=\mathcal{C}_\sigma$ 因此在定理中 $\mathcal{A}_\sigma$ 和 $\mathcal{A}_{\sigma\delta}$ 可以分别被 $\mathcal{C}_\sigma$ 和 $\mathcal{C}_{\sigma\delta}$ 代替.
6. 令 $\mathcal{A}$ 为在有限并集和有限交集下闭的集簇，例如集合代数.
   a. 证明 $\mathcal{A}_\sigma$ 在可数并集和有限交集下闭.

b. 证明$\mathcal{A}_{\sigma\delta}$内的每个集是$\mathcal{A}_\sigma$内的递减集合序列的交集.

7. 令 μ 为代数$\mathcal{A}$上的有限测度，μ^* 为诱导的外测度. 证明一个集合 E 可测当且仅当对于每个 $\varepsilon>0$ 存在集合 $A\in\mathcal{A}_\sigma$，$A\subset E$，使得 $\mu^*(E\sim A)<\varepsilon$.

8. 若从 X 上的外测度μ^* 开始且构造 μ^* 可测集上的诱导测度 $\bar{\mu}$，我们可以用 $\bar{\mu}$ 诱导一个外测度 μ^+.

298

a. 证明对于每个集合 E 我们有 $\mu^+E\geqslant\mu^*E$.

b. 对于给定集合 E 我们有 $\mu^+E=\mu^*E$ 当且仅当存在一个 μ^* 可测集 $A\supset E$ 满足 $\mu^*A=\mu^*E$.

c. 证明当且仅当 μ^* 为正则时 $\mu^+E=\mu^*E$ 对于每个集合 E 成立.

d. 证明外测度 μ^* 正则当且仅当它由代数上的测度诱导.

e. 令 X 为由两点组成的集合，构造一个 X 上非正则的外测度.

9. 令 μ^* 为正则外测度.

a. 证明由 μ^* 诱导的测度 $\bar{\mu}$ 是完备的和饱和的.

b. 令$(X, \mathcal{A}, \mu)$为完备测度空间，令 $\bar{\mu}$ 为通过卡拉泰奥多里过程得到的 μ 的延拓，那么 $\bar{\mu}$ 与习题 11.8c 给出的延拓相同.

10. 令 μ 为代数$\mathcal{A}$上的测度，$\bar{\mu}$ 为 μ 通过卡拉泰奥多里过程给出的 μ 的延拓，令 E 为关于 $\bar{\mu}$ 可测的集合且 $\bar{\mu}E<\infty$，那么给定 $\varepsilon>0$，存在一个 $A\in\mathcal{A}$使得
$$\bar{\mu}(A\Delta E)<\varepsilon.$$

11. 我们说一个函数 φ 是$\mathcal{A}$简单的，若 $\varphi=\sum a_i\chi_{A_i}$，其中 $A_i\in\mathcal{A}$. 令 μ 为$\mathcal{A}$上的测度且 $\bar{\mu}$ 是它的延拓.

a. 给定 $\varepsilon>0$ 和一个 $\bar{\mu}$ 可积函数 f，存在一个$\mathcal{A}$简单函数 φ 使得
$$\int|f-\varphi|\,\mathrm{d}\bar{\mu}<\varepsilon.$$

b. 证明习题 11.21c 中的函数 φ 可以取为$\mathcal{A}$简单.

*12.3 勒贝格-斯蒂尔切斯积分

令 X 为实数集且$\mathcal{B}$为所有博雷尔集组成的类，定义在$\mathcal{B}$上且对于每个有界集有限的测度 μ 称为一个贝尔测度(在实直线上). 对每个有限贝尔测度我们定义一个与之相应的函数 F 如下：
$$F(x)=\mu(-\infty,x].$$
函数 F 称为 μ 的累积分布函数且它是实值和单调递增的. 我们有
$$\mu(a,b]=F(b)-F(a).$$

299

由于$(a, b]$是集合$(a, b+1/n]$的交集，因此命题 11.2 蕴涵
$$\mu(a,b]=\lim_{n\to\infty}\mu\left(a,b+\frac{1}{n}\right],$$
因而
$$F(b)=\lim_{n\to\infty}F\left(b+\frac{1}{n}\right)=F(b+).$$
因此一个累积分布函数右连续. 类似地，

$$\mu\{b\} = \lim_{n\to\infty}\mu\left(b-\frac{1}{n},b\right]$$
$$= \lim_{n\to\infty}F(b) - F\left(b-\frac{1}{n}\right)$$
$$= F(b) - F(b-).$$

因此 F 在 b 连续当且仅当由 b 单独组成的集合 $\{b\}$ 的测度为零. 由于 $\varnothing = \bigcap(-\infty, -n]$, 我们有

$$\lim_{n\to-\infty} F(n) = 0,$$

因此根据 F 的单调性,

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0.$$

我们用以下引理概括这些性质:

10. 引理 若 μ 是实直线上的有限贝尔测度, 则它的累积分布函数 F 是右连续的单调递增有界函数. 此外, $\lim_{x\to-\infty} F(x)=0$.

假定我们从右连续的单调递增函数 F 开始, 那么我们将看到存在惟一的贝尔测度 μ 使得

300

$$\mu(a,b] = F(b) - F(a) \tag{2}$$

对于所有形如 $(a, b]$ 的区间成立, 其中我们定义 $F(\infty)=\lim_{x\to\infty}F(x)$ 与 $F(-\infty)=\lim_{x\to-\infty}F(x)$. 我们从以下引理开始, 其证明留给读者(习题 12):

11. 引理 令 F 为单调递增右连续函数. 若 $(a, b]\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}(a_i, b_i]$, 则

$$F(b) - F(a) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} F(b_i) - F(a_i).$$

若令 $\mathcal{C}$ 为由所有形如 $(a, b]$ 或 (a, ∞) 的区间组成的半代数且设 $\mu(a, b]=F(b)-F(a)$, 那么容易看出 μ 满足命题 9 的条件(i), 且由于引理 11 正好是第二个条件, 我们看到 μ 有惟一的到由 $\mathcal{B}$ 生成的代数上的测度的延拓. 根据定理 8 这个 μ 能被延拓到包含 $\mathcal{C}$ 的 σ 代数. 由于博雷尔集类 $\mathcal{B}$ 是包含 $\mathcal{C}$ 的最小代数, 我们有 μ 到贝尔测度的延拓. 测度 μ 是 σ 有限的, 这是由于 X 是区间 $(n, n+1]$ 的并集且每个这样的区间具有有限测度. 因此 μ 到 $\mathcal{B}$ 的延拓是惟一的, 且我们有以下命题:

12. 命题 令 F 为单调递增右连续函数, 那么存在惟一的贝尔测度 μ 使得对于所有 a 和 b 我们有

$$\mu(a,b] = F(b) - F(a).$$

13. 系 假定 $F(-\infty)=0$, 则每个有界单调右连续函数是惟一的有限贝尔测度的累积分布函数.

若 φ 是非负博雷尔可测函数, F 是单调递增右连续函数, 我们定义 φ 的关于 F 的勒贝格-斯蒂尔切斯积分为

$$\int\varphi\mathrm{d}F = \int\varphi\mathrm{d}\mu,$$

其中 μ 是以 F 为累积分布函数的贝尔测度. 若 φ 既正又负, 且它关于 μ 可积, 则我们说它关于

F 可积. [301]

若 F 是任何单调递增函数，则惟一存在单调递增右连续函数 F^* 使得只要 F 右连续就与 F 一致(习题 13)，且我们定义 φ 的关于 F 的勒贝格-斯蒂尔切斯积分为

$$\int \varphi \mathrm{d}F = \int \varphi \mathrm{d}F^*.$$

若 F 是单调右连续函数，则 $\int_a^b \varphi \mathrm{d}F$ 与黎曼-斯蒂尔切斯积分一致，只要后者有定义的话. 勒贝格-斯蒂尔切斯积分仅当 F 单调(或更一般的有界变差，如习题 14c 所叙述)时有定义，而当 F 不是有界变差的，比如说当 F 连续而 φ 为有界变差的，黎曼-斯蒂尔切斯积分能够存在.

习题

12. 证明引理 11. [选取 $\varepsilon>0$. 根据 F 的右连续性，选取 $\eta_i>0$ 使得 $F(b_i+\eta_i)<F(b_i)+\varepsilon 2^{-i}$，且选取 $\delta>0$ 使得 $F(a+\delta)<F(a)+\varepsilon$，那么开区间 $(a_i, b_i+\eta_i)$ 覆盖闭区间 $[a+\delta, b]$，该证明类似于命题 31. 当 $(a, b]$ 为无限时必须额外小心一点.]
13. 令 F 为单调递增函数，定义
$$F^*(x) = \lim_{y\to x+} F(y).$$
那么 F^* 是单调递增函数，它右连续且与 F 一致，只要后者右连续的话. 我们有 $(F^*)^* = F^*$，若 F 和 G 是单调递增函数且只要它们都连续就一致，则 $F^*=G^*$.
14. a. 证明每个有界变差的有界函数 F 生成有限带号的贝尔测度 v 使得
$$v(a,b] = F(b+) - F(a+).$$
b. 证明若尔当分解中的 v^+ 和 v^- 对应于 F 的正变差和负变差.
c. 将勒贝格-斯蒂尔切斯积分 $\int \varphi \mathrm{d}F$ 延拓到有界变差函数 F.
d. 证明若 $|\varphi| \leqslant M$ 且 F 的全变差是 T，则
$$\left|\int \varphi \mathrm{d}F\right| \leqslant MT.$$
15. a. 令 F 为贝尔测度 v 的累积分布函数，且假定 F 是连续的，那么对于任何包含于 F 的值域的博雷尔集 E，我们有 $mE=v[F^{-1}(E)]$，其中 m 是勒贝格测度. [提示：这对区间是正确的，且定理 8 的惟一性部分可用于导出在一般情形的正确性.] [302]
b. 推广到非连续累积分布函数的情形.
16. 令 F 为 $[a, b]$ 上的连续递增函数满足 $F(a)=c$，$F(b)=d$，且令 φ 为 $[c,d]$ 上的非负博雷尔可测函数，那么 $\int_a^b \varphi(F(x))\mathrm{d}F(x) = \int_c^d \varphi(y)\mathrm{d}y$. [提示：用习题 15a 仔细处理当 φ 是特征函数的情形且首先推广到简单的 φ 然后是一般的 φ.]
17. a. 证明一个测度 μ 关于勒贝格测度绝对连续当且仅当它的累积分布函数绝对连续.
b. 若 μ 关于勒贝格测度绝对连续，则它的拉东-尼柯迪姆导数是累积分布函数的导数.
c. 若 F 绝对连续，则
$$\int f \mathrm{d}F = \int f F' \mathrm{d}x.$$

18. 黎曼收敛准则．令 f 为$(0, \infty)$上的非负单调递减函数，g 为$(0, \infty)$上的非负单调递增函数，$\langle a_n \rangle$为非负序列，假定对于每个 $x \in (0, \infty)$，使得 $a_n \geq f(x)$的 n 的个数至多为$g(x)$，那么若$\sum a_n < \infty$，我们有$\int_b^\infty f\,\mathrm{d}g < \infty$.

12.4　积测度

令$(X, \mathfrak{A}, \mu)$和$(Y, \mathcal{B}, v)$为两个完备测度空间，考虑 X 和 Y 的直积 $X \times Y$．若 $A \subset X$ 且 $B \subset Y$，我们称 $A \times B$ 为矩形．若 $A \in \mathfrak{A}$ 且 $B \in \mathcal{B}$，我们称 $A \times B$ 为可测矩形．可测矩形簇$\mathcal{R}$是一个半代数，这是由于

$$(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$$

且

$$\sim (A \times B) = (\widetilde{A} \times B) \cup (A \times \widetilde{B}) \cup (\widetilde{A} \times \widetilde{B}).$$

若 $A \times B$ 是可测矩形，我们设

[303]

$$\lambda(A \times B) = \mu A \cdot vB.$$

14. 引理　令$\{(A_i \times B_i)\}$为可数不相交的可测矩形簇且其并集为可测矩形 $A \times B$，那么

$$\lambda(A \times B) = \sum \lambda(A_i \times B_i).$$

证明　固定一点 $x \in A$，那么对于每个 $y \in B$，点$\langle x, y \rangle$恰属于一个矩形 $A_i \times B_i$．因此 B 是那些使得 x 属于相应的A_i的B_i的不相交并集，因此根据 v 的可数加性，

$$\sum vB_i \cdot \chi_{A_i}(x) = vB \cdot \chi_A(x),$$

因此根据单调收敛定理的系(11.14)，我们有

$$\sum \int vB_i \cdot \chi_{A_i}\,\mathrm{d}\mu = \int v(B) \cdot \chi_A\,\mathrm{d}\mu$$

或

$$\sum vB_i \cdot \mu A_i = vB \cdot \mu A.$$ ■

引理蕴涵 λ 满足命题 9 的条件，因此有惟一的到由所有属于$\mathcal{R}$的有限不相交的集合的并集组成的代数$\mathcal{R}'$上的测度的延拓．定理 8 允许我们将 λ 延拓为一个包含$\mathcal{R}$的 σ 代数$\mathcal{S}$上的完备测度，这个延拓的测度称为 μ 和 v 的积测度，记为 $\mu \times v$．若 μ 和 v 有限(或 σ 有限)，则 $\mu \times v$ 也如此．若 X 和 Y 是实直线且 μ 和 v 都是勒贝格测度，则 $\mu \times v$ 称为平面上的二维勒贝格测度．

以下几个引理的目的是描述关于积测度 $\mu \times v$ 可测的集合的结构．若 E 是 $X \times Y$ 的任意子集且 x 是 X 的点，我们定义 x 截面 E_x为

$$E_x = \{y : \langle x, y \rangle \in E\},$$

类似地，定义 y 在 Y 的 y 截面．E_x 的特征函数 用以下方式与 E 的特征函数相关联．

$$\chi_{E_x}(y) = \chi_E(x, y).$$

[304]

我们也有$(\widetilde{E})_x = \sim(E_x)$且$(\bigcup E_\alpha)_x = \bigcup (E_\alpha)_x$对于任意簇$\{E_\alpha\}$成立．

15. 引理　令 x 为 X 的点且 E 是$\mathcal{R}_{\sigma\delta}$中的集合，那么 E_x 是 Y 的可测子集．

证明　若 E 属于可测矩形类$\mathcal{R}$则引理平凡成立．我们接着证明对于 E 属于$\mathcal{R}_\sigma$引理成立．

令 $E=\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$，其中每个 E_i是可测矩形，那么

$$\begin{aligned}\chi_{E_x}(y)&=\chi_E(x,y)\\&=\sup_i \chi_{E_i}(x,y)\\&=\sup_i \chi_{(E_i)_x}(y).\end{aligned}$$

由于每个 E_i是可测矩形，因此 $\chi_{(E_i)_x}(y)$是 y 的可测函数，因而 χ_{E_x} 也必须可测，这就得到 E_x 可测.

假定现在 $E=\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i$满足 $E_i\in \mathcal{R}_\sigma$，那么

$$\begin{aligned}\chi_{E_x}&=\chi_E(x,y)\\&=\inf_i \chi_{E_i}(x,y)\\&=\inf_i \chi_{(E_i)_x}(y),\end{aligned}$$

且我们看到 χ_{E_x} 是可测的. 因此对于任意 $E\in \mathcal{R}_{\sigma\delta}$，$E_x$ 可测. ■

16. 引理　*令 E 是 $\mathcal{R}_{\sigma\delta}$ 中的一个集合满足 $\mu\times v(E)<\infty$，那么如下定义的函数 g*

$$g(x)=vE_x$$

是 x 的可测函数且

$$\int g\,\mathrm{d}\mu=\mu\times v(E).$$

证明　若 E 是可测矩形则引理平凡成立. 我们首先注意到 $\mathcal{R}_\sigma$ 中的任意集合是不相交可测矩形的并集. 令 $\langle E_i\rangle$为不相交的可测矩形序列，且令 $E=\bigcup E_i$. 设

$$g_i(x)=v[(E_i)_x].$$

305

那么每个 g_i是非负可测函数，且

$$g=\sum g_i.$$

因此 g 可测，且根据单调收敛定理(11.14)的系，我们有

$$\begin{aligned}\int g\,\mathrm{d}\mu&=\sum\int g_i\,\mathrm{d}\mu\\&=\sum \mu\times v(E_i)\\&=\mu\times v(E).\end{aligned}$$

因此，引理对于 $E\in \mathcal{R}_\sigma$成立.

令 E 为 $\mathcal{R}_{\sigma\delta}$ 内的有限测度集，那么存在一个 $\mathcal{R}_\sigma$ 内的集合序列 $\langle E_i\rangle$ 使得 $E_{i+1}\subset E_i$ 及 $E=\bigcap E_i$. 根据命题 6 我们可以取 $\mu\times v(E_1)<\infty$. 令 $g_i(x)=v[(E_i)_x]$，由于

$$\int g_1\,\mathrm{d}\mu=\mu\times v(E_1)<\infty,$$

我们有 $g_1(x)<\infty$对于几乎所有 x 成立. 对于满足 $g_1(x)<\infty$的 x，我们有$\langle (E_i)_x\rangle$是一个具有

有限测度的递减的可测集合序列且其交集为 E_x.

因此根据命题 11.2，我们有

$$g(x)=v(E_x)=\lim v[(E_i)_x]$$
$$=\lim g_i(x).$$

因此

$$g_i\to g \text{ a. e.},$$

因而 g 可测. 由于 $0\leqslant g_i\leqslant g_1$，勒贝格收敛定理蕴涵

$$\int g\mathrm{d}\mu=\lim\int g_i\mathrm{d}\mu$$
$$=\lim \mu\times v(E_i)$$
$$=\mu\times v(E).$$

最后一个等式由命题 11. 2 得到. ■

306

17. 引理　令 E 为一个满足 $\mu\times v(E)=0$ 的集合，那么对于几乎所有的 x 我们有 $v(E_x)=0$.

证明　根据命题 6 存在一个属于 $\mathcal{R}_{\sigma\delta}$ 的集合 F 使得 $E\subset F$ 且 $\mu\times v(F)=0$. 根据引理 16 对于几乎所有的 x 我们有 $v(F_x)=0$. 但 $E_x\subset F_x$，由于 v 是完备的，因而对于几乎所有的 x，我们有 $vE_x=0$. ■

18. 命题　令 E 为 $X\times Y$ 的可测子集使得 $\mu\times v(E)$ 有限，那么对于几乎所有的 x 集合 E_x 是 Y 的一个可测子集. 每个如下定义的函数 g

$$g(x)=v(E_x)$$

是一个对于几乎所有的 x 定义的可测函数且

$$\int g\mathrm{d}\mu=\mu\times v(E).$$

证明　根据命题 6，存在属于 $\mathcal{R}_{\sigma\delta}$ 的集合 F 使得 $E\subset F$ 且 $\mu\times v(F)=\mu\times v(E)$. 令 $G=F\sim E$，由于 E 和 F 是可测的，因此 G 也是可测的，且

$$\mu\times v(F)=\mu\times v(E)+\mu\times v(G).$$

由于 $\mu\times v(E)$ 有限且等于 $\mu\times v(F)$，我们有 $\mu\times v(G)=0$. 因此根据引理 17，对于几乎所有的 x 我们有 $vG_x=0$. 因此

$$g(x)=vE_x=vF_x \text{ a. e.};$$

根据引理 16，g 是一个可测函数. 再次根据引理 16 有

$$\int g\mathrm{d}\mu=\mu\times v(F)$$
$$=\mu\times v(E).$$ ■

以下两个定理使我们能交换积分的次序且利用迭代的办法计算关于积测度的积分.

19. 定理（富比尼）　令 $(X,\mathcal{A},\mu)$ 和 $(Y,\mathcal{B},v)$ 为两个完备测度空间且 f 是 $X\times Y$ 上的可积函数，那么

i. 对于几乎所有的 x，$f_x(y)=f(x,y)$ 定义的函数 f_x 是 Y 上的可积函数.

307

i′. 对于几乎所有的 y，由 $f^y(x)=f(x,y)$ 定义的函数 f^y 是 X 上的可积函数.

ii. $\int_Y f(x,y)\mathrm{d}v(y)$ 是 X 上的可积函数.

ii′. $\int_X f(x,y)\mathrm{d}\mu(x)$ 是 Y 上的可积函数.

iii. $\int_X\left[\int_Y f\mathrm{d}v\right]\mathrm{d}\mu=\int_{X\times Y}f\mathrm{d}(\mu\times v)=\int_Y\left[\int_X f\mathrm{d}\mu\right]\mathrm{d}v.$

证明　因为 x 和 y 对称所以仅需证明(i)，(ii)以及(iii)的第一部分. 若定理的结论对于两个函数的每一个成立，则对于它们的差也成立，因此仅需考虑 f 非负的情形. 命题 18 断言当 f 是具有有限测度的可测集的特征函数时定理成立，因此若 f 是在有限测度集外消失的简单函数则定理必须成立. 命题 11.7 断言每个非负可积函数 f 是递增非负简单函数序列 $\langle\varphi_n\rangle$ 的极限，由于每个 φ_n 可积且简单，它必须在有限测度集外消失. 因此 f_x 是递增序列 $\langle(\varphi_n)_x\rangle$ 的极限且可测. 根据单调收敛定理，

$$\int_Y f(x,y)\mathrm{d}v(y)=\lim\int_Y\varphi_n(x,y)\mathrm{d}v(y),$$

因而该积分是 x 的可测函数. 再次根据单调收敛定理，

$$\begin{aligned}\int_X\left[\int_Y f\mathrm{d}v\right]\mathrm{d}\mu&=\lim\int_X\left[\int_Y\varphi_n\mathrm{d}v\right]\mathrm{d}\mu\\&=\lim\int_{X\times Y}\varphi_n\mathrm{d}(\mu\times v)\\&=\int_{X\times Y}f\mathrm{d}(\mu\times v).\end{aligned}$$

■

为运用富比尼定理，必须首先证明 f 关于 $\mu\times v$ 可积；即，必须证明 f 是 $X\times Y$ 上的可测函数，且 $\int|f|\mathrm{d}(\mu\times v)<\infty$. 有时难于建立 f 在 $X\times Y$ 上的可测性，但在许多情形中我们能够通过拓扑的考虑建立它(参考习题21). 当 μ 和 v 是 σ 有限的情形时，f 的可积性可用以下定理由累次积分确定：

308

20. 定理　令 $(X,\ \mathcal{A},\ \mu)$ 和 $(Y,\ \mathcal{B},\ v)$ 为两个 σ 有限测度空间，且令 f 为 $X\times Y$ 上的非负可测函数，那么

i. 对于几乎所有的 x，由 $f_x(y)=f(x,\ y)$ 定义的函数 f_x 是 Y 上的可测函数.

i′. 对于几乎所有的 y，由 $f^y(x)=f(x,\ y)$ 定义的函数 f^y 是 X 上的可测函数.

ii. $\int_Y f(x,y)\mathrm{d}v(y)$ 是 X 上的可测函数.

ii′. $\int_X f(x,y)\mathrm{d}\mu(x)$ 是 Y 上的可测函数.

iii. $\int_X\left[\int_Y f\mathrm{d}v\right]\mathrm{d}\mu=\int_{X\times Y}f\mathrm{d}(\mu\times v)=\int_Y\left[\int_X f\mathrm{d}\mu\right]\mathrm{d}v.$

证明　对于非负可测函数 f，定理 19 的证明中仅有一处用到 f 的可积性，即推断出存在有限测度集外消失的递增简单函数序列 $\langle\varphi_n\rangle$ 使得 $f=\lim\varphi_n$. 但若 μ 和 v 是 σ 有限，则 $\mu\times v$ 也是如此，根据命题 11.7，$X\times Y$ 上的任何非负可测函数可被如此逼近. ■

若 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 分别是 X 和 Y 上的 σ 代数，则包含可测矩形的最小 σ 代数记为 $\mathcal{A}\times\mathcal{B}$. 因此积测

度是定义在包含$\mathcal{A}\times\mathcal{B}$的$\sigma$代数上的测度，且由于$\mu\times v$是由卡拉泰奥多里延拓过程得到的，因此它既饱和又完备．若μ和v都是σ有限，则$\mathcal{A}\times\mathcal{B}$上的积测度已经饱和且$\mu\times v$的可测集是那些在零测度集与$\mathcal{A}\times\mathcal{B}$内的集合不同的集合．

许多作者倾向于定义积测度为$\mu\times v$在$\mathcal{A}\times\mathcal{B}$的限制．如同我们所做的那样，取$\mu\times v$完备的优点是，我们想使它具有勒贝格测度所具有的性质：m维勒贝格测度与n维勒贝格测度的乘积是$(n+m)$维勒贝格测度．由于对富比尼和拓内利定理的假设仅要求关于完备积测度可测，因此它们比要求关于$\mathcal{A}\times\mathcal{B}$可测弱．用较弱的假设付出的代价是定理的结论中必须加上短语“几乎所有”．这是预料得到的，这是由于对于属于零测度集的x，f的任意变化不改变f的可测性或可积性，但对那些x，f_x可以是任意的．然而若f关于$\mathcal{A}\times\mathcal{B}$可测，则对于每个$x$，$f_x$可测．

309

我们已经用μ的完备性证明$\int f(x,y)\mathrm{d}v(y)$是可测的，若$\mu$不完备我们将仅作出这是一个在零测度集的子集与可测函数不同的函数的结论．然而若f关于$\mathcal{A}\times\mathcal{B}$可测，则甚至当$\mu$不完备（假定$f$可积）时$\int f(x,y)\mathrm{d}v(y)$关于$\mathcal{A}$可测．但这个结论的证明惊人地复杂，其证明可参见Halmos[5]，第143页．

习题中的例子表明我们不能省略富比尼定理中f的可积性的假设或在拓内利定理中省略σ有限和非负的假设．习题26表明f的可测性在这些定理中起着必不可少的作用：若省略这个假设，甚至对于有界函数和有限测度，我们可以有累次积分$\int\left[\int f\mathrm{d}v\right]\mathrm{d}\mu$和$\int\left[\int f\mathrm{d}\mu\right]\mathrm{d}v$的良定义但不相等．

习题

19. 令$X=Y$为正整数集，$\mathcal{A}=\mathcal{B}=\mathcal{P}(X)$，且令$v=\mu$为如下定义的测度：若$E$有限，设$\mu(E)$为等于$E$的点的数目；若$E$无限则设$\mu(E)$等于$\infty$．（这个测度称为计数测度．）对这种情形显式地叙述富比尼和托内利定理．
20. 令$(X, \mathcal{A}, \mu)$为任意σ有限测度空间，Y为正整数集，v为计数测度（习题19），那么定理20和系11.14叙述的是相同的结论．然而，系11.14是正确的即使μ不是σ有限，因此若$(Y, \mathcal{B}, v)$是这个特殊的测度空间，则没有σ有限托内利定理成立．
21. 令$X=Y=[0, 1]$，且令$\mu=v$为勒贝格测度．证明$X\times Y$中的每个开集是可测的，且因此$X\times Y$的每个博雷尔集是可测的．

310

22. 令h和g分别为X和Y上的可积函数，定义$f(x, y)=h(x)g(y)$，那么f在$X\times Y$上可积且
$$\int_{X\times Y} f\,\mathrm{d}(\mu\times v)=\int_X h\,\mathrm{d}\mu\int_Y g\,\mathrm{d}v.$$
（注意：我们不必假设μ与v是σ有限．）
23. 证明若我们仅假设$\{\langle x, y\rangle: f(x, y)\neq 0\}$是$\sigma$有限测度的集合而不假设$\mu$与$v$是$\sigma$有限，则拓内利定理仍成立．
24. 以下例子表明我们不能去掉托内利定理中f为非负或富比尼定理中f为可积的假设．令

$X=Y$ 为正整数且 $\mu=v$ 为计数测度. 令

$$f(x,y)=\begin{cases} 2-2^{-x} & 若\ x=y \\ -2+2^{-x} & 若\ x=y+1 \\ 0 & 其他情况. \end{cases}$$

25. 以下例子表明我们不能去掉富比尼定理中 f 为可积或托内利定理中 μ 与 v 是 σ 有限的假设：令 $X=Y$ 为区间[0, 1]，其中 $\mathfrak{A}=\mathcal{B}$ 为博雷尔集类. 令 μ 为勒贝格测度，v 为计数测度. 那么对角线 $\Delta=\{\langle x,\ y\rangle\in X\times Y:\ x=y\}$ 可测(事实上是一个 $\mathcal{R}_{\sigma\delta}$)，但它的特征函数不满足富比尼定理和托内利定理的条件(iii)的任何等式.

26. 以下例子表明即使我们假设 f^y 和 f_x 可测且 $\int f(x,y)\mathrm{d}v(y)$ 和 $\int f(x,y)\mathrm{d}\mu(x)$ 可积我们也不能省略掉富比尼定理和托内利定理中 f 关于积测度可测的假设. 令 $X=Y$ 为小于或等于第一不可数序数集 Ω 的序数集合，令 $\mathfrak{A}=\mathcal{B}$ 为由所有可数集和它们的补集组成的 σ 代数. 若 E 可数令 $\mu E=0$，否则若 E 不可数令 $\mu E=1$ 来定义 $\mu=v$，定义 $X\times Y$ 的子集 S 为 $S=\{\langle x,y\rangle:x<y\}$，那么对每个 x 和 y，S_x 和 S_y 可测，但若 f 是 S 的特征函数我们有

$$\int\left[\int f(x,y)\mathrm{d}\mu(x)\right]\mathrm{d}v(y)\neq\int\left[\int f(x,y)\mathrm{d}v(y)\right]\mathrm{d}\mu(x).$$

若我们有连续统假设，即 X 可与[0, 1]一一对应，则我们取 f 为单位正方形上的函数使得 f_x 和 f^y 都有界且对每个 x 和 y 可测但富比尼定理和托内利定理的结论不成立.

311

27. 证明若 $(X,\ \mathfrak{A},\ \mu)$ 和 $(Y,\ \mathcal{B},\ v)$ 是两个 σ 有限测度空间，则 $\mu\times v$ 是 $\mathfrak{A}\times\mathcal{B}$ 上赋予每个可测矩形 $A\times B$ 值 $\mu A v B$ 的仅有的测度. 证明若没有 σ 有限，则具有这个性质的 $\mathfrak{A}\times\mathcal{B}$ 上的测度不必惟一.

28. a. 证明若 $E\in\mathfrak{A}\times\mathcal{B}$，则对于每个 x，$E_x\in\mathcal{B}$.
    b. 若 f 关于 $\mathfrak{A}\times\mathcal{B}$ 可测，则对于每个 x，f_x 关于 $\mathcal{B}$ 可测.

29. 令 $X=Y=\mathbf{R}$ 且令 $\mu=v$ 为勒贝格测度，那么 $\mu\times v$ 是 $X\times Y=\mathbf{R}^2$ 上的二维勒贝格测度. 我们常将 $\mathrm{d}(\mu\times v)$ 写为 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.
    a. 对于 $\mathbf{R}$ 的每个可测子集 E，令
    $$\sigma(E)=\{\langle x,y\rangle:x-y\in E\}.$$
    证明 $\sigma(E)$ 是 $\mathbf{R}^2$ 的可测子集. [提示：首先考虑 E 为开，E 是一个 G_δ，E 为零测度集，E 可测的情形.]
    b. 若 f 是 $\mathbf{R}$ 上的可测函数，则由 $F(x,\ y)=f(x-y)$ 定义的函数 F 是 $\mathbf{R}^2$ 上的可测函数.
    c. 若 f 和 g 是 $\mathbf{R}$ 上的可积函数，则对于几乎所有的 x 由 $\varphi(y)=f(x-y)g(y)$ 定义的函数 φ 可积. 若将它的积分记为 $h(x)$，则 h 可积且
    $$\int|h|\leqslant\int|f|\int|g|.$$

30. 令 f 和 g 为 $L^1(-\infty,\infty)$ 内的函数，且定义 $f*g$ 为由 $h(y)=\int f(y-x)g(x)\mathrm{d}x$ 定义的函数 h.
    a. 证明 $f*g=g*f$.

b. 证明$(f*g)*h=f*(g*h)$.

c. 对于$f\in L^1$,定义$\hat{f}$为$\hat{f}(s)=\int e^{ist}f(t)dt$,那么$\hat{f}$是有界复函数且

$$\widehat{f*g}=\hat{f}\hat{g}.$$

31. 令f为$(-\infty,\infty)$上的非负可积函数，且令m_2为$\mathbf{R}^2$上的二维勒贝格测度，那么

$$m_2\{\langle x,y\rangle:0\leqslant y\leqslant f(x)\}=m_2\{\langle x,y\rangle:0<y<f(x)\}=\int f(x)dx.$$

令$\varphi(t)=m\{x:f(x)\geqslant t\}$，那么$\varphi$是递减函数且

$$\int_0^\infty\varphi(t)dt=\int f(x)dx.$$

[312] 32. 若$\langle(X_i,\mathfrak{A}_i,\mu_i)\rangle_{i=1}^n$是测度空间的有限簇，我们可以如下构造空间$X_1\times\cdots\times X_n$上的积测度$\mu_1\times\cdots\times\mu_n$：从形如$R=A_1\times\cdots\times A_n$的矩形的半代数和$\mu(R)=\prod\mu_iA_i$开始，并运用卡拉泰奥多里延拓程序．证明若将$(X_1\times\cdots\times X_p)\times(X_{p+1}\times\cdots\times X_n)$等同于$(X_1\times\cdots\times X_n)$，则$(\mu_1\times\cdots\times\mu_p)\times(\mu_{p+1}\times\cdots\times\mu_n)=\mu_1\times\cdots\times\mu_n$.

33. 满足$\mu X=1$的测度μ常常称为概率测度．令$\{(X_\lambda,\mathfrak{A}_\lambda,\mu_\lambda)\}$为概率测度空间簇，证明我们能够在空间$\bigtimes_\lambda X_\lambda$上的一个适当的$\sigma$代数上定义一个概率测度

$$\mu=\prod_\lambda\mu_\lambda$$

使得当$A=\bigtimes_\lambda A_\lambda$时

$$\mu A=\prod\mu_\lambda A_\lambda$$

(注意若除可数个A_λ外有$\mu A_\lambda=1$，则μA仅能非零).

12.5　积分算子

本节我们研究某类积分算子，该类算子定义了从$L^q(v)$到$L^p(\mu)$的线性变换．令字母p，q和r代表扩充实数$1\leqslant p\leqslant\infty$，以此类推，用$p^*$表示共轭指数$p/(p-1)$使得$1/p+1/p^*=1$．我们将分别用$\alpha$，$\beta$和$\gamma$表示$1/p$，$1/q$和$1/r$．因此$\alpha^*=1-\alpha$.

令$(X,\mathfrak{A},\mu)$和$(Y,\mathcal{B},v)$是两个σ有限测度空间且$k=k(x,y)$为$X\times Y$上的非负可测函数．我们定义

$$M_{\gamma,\beta}^*=\sup\iint h(x)k(x,y)g(y)d(\mu\times v)$$

h和g遍历$L^r(\mu)$和$L^q(v)$中范数至多为1的所有函数，其中$\gamma=1/r$且$\beta=1/q$．由于$k\geqslant0$，因此仅需考虑非负的h和g．若$M_{\gamma,\beta}^*<\infty$，我们说$k$是**协变型**$(r,q)$的**积分核**，且称$M_{\gamma,\beta}^*$为它的协变范数．我们也说$k$是**算子型**$(p,q)$的积分核，其中$p=r^*$．我们写作

[313]

$$M_{\alpha,\beta}=M_{(1-\alpha),\beta}^*=\|k\|_{p,q}.$$

协变型的概念中可认为k定义$L^r(\mu)$的元素和$L^q(v)$的元素之间的双线性形式

$$[h,g]=\iint h(x)k(x,y)g(y)d(\mu\times v)$$

其中 $M^*_{\gamma,\beta}$是双线性形式的范数. 以下命题给出了这个关系的算子版本.

21. 命题　令 k 为 $X\times Y$ 上协变型(p^*, q)的非负可测函数且 $g\in L^q(v)$，那么对于几乎所有$x\in X$，积分

$$f(x)=\int_Y k(x,y)g(y)\mathrm{d}v$$

存在，且函数 f 属于 $L^p(\mu)$满足

$$\|f\|_p\leqslant M_{1/p,1/q}\|g\|_q.$$

证明　由于 μ 是 σ 有限，因此存在一个函数$h\in L^{p^*}(\mu)$使得 $h(x)>0$ 处处成立. 由于

$$\iint_{X\times Y}h(x)k(x,y)\mid g(y)\mid \mathrm{d}(\mu\times v)\leqslant M_{\alpha,\beta}\|h\|_{p*}\|g\|_q<\infty,$$

根据托内利定理我们看到对于几乎所有 $x\in X$

$$\int_Y h(x)k(x,y)\mid g(y)\mid \mathrm{d}v=h(x)\int_Y k(x,y)\mid g(y)\mid \mathrm{d}v.$$

因此对于几乎所有 x，$f(x)$存在. 令 h 为 $L^{p^*}(\mu)$中的任意函数，那么根据富比尼定理

$$\int_X\mid h(x)f(x)\mid \mathrm{d}\mu=\iint_{X\times Y}\mid h(x)k(x,y)g(y)\mid \mathrm{d}(\mu\times v),$$

这是由于 $\mid hkg\mid$ 可积. 相应地，hf 可积且

$$\left|\int hf\,\mathrm{d}\mu\right|\leqslant M^*_{1-\alpha,\beta}\|h\|_{p*}\|g\|_q.$$

[314]

根据引理 7.27 我们有 $f\in L^p$且

$$\|f\|_p\leqslant M_{\alpha,\beta}\|g\|_q.$$ ■

这个命题表明我们已经定义了线性算子 T：$L^q(v)\to L^p(\mu)$为取 $Tg=f$，其中

$$f(x)=\int_Y k(x,y)g(y)\mathrm{d}v.$$

进一步，可证明算子 T 的范数 $\|T\|$ 为 $M_{\alpha,\beta}=\|k\|_{p,q}$.

更一般地，对于一个 $X\times Y$ 上的可测函数 $k(x, y)$，若 $\mid k\mid$ 是算子型(p, q)的我们称 k 为绝对算子型(p, q)的积分算子. 对于这样的核该命题可重述为：

22. 系　令 $k(x, y)$为 $X\times Y$ 上绝对算子型(p, q)的可测函数且 $g\in L^q(v)$，那么对于几乎所有 $x\in X$ 积分

$$f(x)=\int_Y k(x,y)g(y)\mathrm{d}v$$

存在，且函数 f 属于 $L^p(\mu)$满足

$$\|f\|_p\leqslant\|\mid k\mid\|_{p,q}\|g\|_q.$$

以下有用的定理归功于 M. 里斯.

23. 定理　令 k 为 $X\times Y$ 上的非负可测函数，且设

$$M^*_{\gamma,\beta}=\sup\iint_{X\times Y}h(x)k(x,y)g(y)\mathrm{d}(\mu\times v),$$

其中 f 和 g 分别遍历 $L^r(\mu)$和 $L^q(v)$的单位球，那么函数 $\log M^*_{\gamma,\beta}$在正方形 $0\leqslant\gamma\leqslant1$，$0\leqslant\beta\leqslant1$

上是 γ 和 β 的凸函数.

证明 我们必须证明若 $0\leqslant\lambda\leqslant1$，$\gamma=\lambda\gamma_1+(1-\lambda)\gamma_2$，且 $\beta=\lambda\beta_1+(1-\lambda)\beta_2$，则

$$M^*_{\gamma,\beta}\leqslant(M^*_{\gamma_1,\beta_1})^{\lambda}(M^*_{\gamma_2,\beta_2})^{1-\lambda}.$$

令 h 和 g 为 $L^r(\mu)$ 和 $L^q(v)$ 的单位球内的任意非负函数. 设

315

$$h_1=h^{\gamma_1/\gamma},h_2=h^{\gamma_2/\gamma},g_1=g^{\beta_1/\beta},g_2=g^{\beta_2/\beta}.$$

那么 h_1，h_2，g_1 和 g_2 分别在 $L^{r_1}(\mu)$，$L^{r_2}(\mu)$，$L^{q_1}(v)$ 和 $L^{q_2}(v)$ 的单位球内. 对 $u=1/\lambda$ 和 $u^*=1/(1-\lambda)$ 运用赫尔德不等式也有

$$\begin{aligned}\iint hkg&=\iint(h_1kg)^{\lambda}(h_2kg_2)^{1-\lambda}\\&\leqslant\left[\iint h_1kg_1\right]^{\lambda}\cdot\left[\iint h_2kg\right]^{1-\lambda}\end{aligned}$$

因此

$$\iint hkg\leqslant(M^*_{\gamma_1,\beta_1})^{\lambda}(M^*_{\gamma_2,\beta_2})^{1-\lambda}$$

在 h 和 g 上取上确界便得到结果. ■

24. 系 在正方形 $0\leqslant\alpha\leqslant1$，$0\leqslant\beta\leqslant1$ 上函数 $\log M_{\alpha,\beta}$ 是 α 和 β 的凸函数.

证明 我们有 $M_{\alpha,\beta}=M^*_{1-\alpha,\beta}$. ■

先前里斯的定理要求 k 非负. 一个也归功于里斯的更深刻的定理断言对混合符号(或甚至复值)的核，相应积分算子的算子范数 $M_{\alpha,\beta}$ 在正方形 $0\leqslant\alpha\leqslant1$，$0\leqslant\beta\leqslant1$ 上对数凸. 有兴趣的读者可在 Dunford and Schwartz[4]，525 页或 Hardy，Littlewood and Pólya[19]，214 页找到证明.

当 $(X,\mathcal{A},\mu)=(Y,\mathcal{B},v)=(\mathbf{R}^n,\mathfrak{M},m)$ 时，其中 m 是勒贝格测度，通过对于某个 $k\in L^r(m)$ 取 $k(x,y)=k(x-y)$ 我们得到一类特殊的积分算子，这样的算子称为卷积算子. 容易证明在这种情形中 k 是协变型$(1,r^*)$和$(r^*,1)$. 从命题 21 得到对于 $0\leqslant\lambda\leqslant1$ 当

$$\frac{1}{p}=1-\frac{1-\lambda}{r},\quad\frac{1}{q}=1-\frac{\lambda}{r}$$

时 k 也是协变型(p,q)，这给出以下命题.

25. 命题 令 g，h 和 k 分别为 $\mathbf{R}^n$ 上的函数类 L^q，L^p 和 L^r 的函数，其中 $1/p+1/q+1/r=2$，那么

316

$$\iint_{\mathbf{R}^{2n}}|h(x)k(x-y)g(y)|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant\|h\|_p\|k\|_r\|g\|_q.$$

26. 命题 令 $g\in L^q$ 且 $k\in L^r$，其中 $1/q+1/r>1$，那么函数

$$f(x)=\int_{\mathbf{R}^n}k(x-y)g(y)\mathrm{d}y$$

对几乎所有 x 有定义且

$$\|f\|_p\leqslant\|k\|_r\|g\|_q,$$

其中

$$\frac{1}{p}=\frac{1}{q}+\frac{1}{r}-1.$$

习题

34. 证明对于命题 21 定义的算子 T 我们有 $\|T\|=M_{\alpha,\beta}$.
35. 证明系 22.
36. 证明命题 25.
37. 证明命题 26.
38. 令 g，h 和 k 为 $\mathbf{R}^n$ 上的函数类 L^q，L^p 和 L^r 的函数，其中 $1/p+1/q+1/r\leqslant 2$，那么在 $\mathbf{R}^{2n}$ 上 $h(x)k(x-y)g(y)$ 属于 L^u，其中
$$\frac{2}{u}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}.$$

*12.6　内测度

令 μ 为代数 $\mathfrak{A}$ 上的测度且 μ^* 为诱导的外测度，那么 μ^*E 可被认为是可能的对于 E 与 μ 一致的最大测度. 我们也可以定义内测度 μ_*，它赋予给定的 E 以与 μ 一致的最小测度：

定义　令 μ 为代数 $\mathfrak{A}$ 上的测度且 μ^* 为诱导的外测度，我们定义由 μ 诱导的内测度 μ_* 为
$$\mu_*E=\sup[\mu A-\mu^*(A\sim E)],$$
其中上确界对于所有满足 $\mu^*(A\sim E)<\infty$ 的集合 $A\in\mathfrak{A}$ 取.　317

内测度在历史上是很重要的，因为一个集合的可测性最初由内外测度刻画. 历史上内测度最初对 $\mathbf{R}$ 的有界子集定义. 对这样的子集以上定义等价于历史上的
$$\mu_*E=l(I)-\mu(I\sim E),$$
其中 I 是包含 E 的有限区间(见引理 29). 于是一个有界集 E 定义为可测的，若 $\mu_*E=\mu^*E$，且无界集的可测性根据它们与有限区间的交集来定义. 即使在有界集的情形这个程序也比我们本章所采用的卡拉泰奥多里的优美方法繁琐多了. 除有重要的历史意义外，对于从代数 $\mathfrak{A}$ 延拓到包含 $\mathfrak{A}$ 和一个给定集合 E(其不必可测)的代数与对于确定延拓 μ 到包含 $\mathfrak{A}$ 的 σ 代数的自由度，内测度都是有用的. 本节将讨论内测度并建立内测度的基本性质.

27. 引理　我们有 $\mu_*E\leqslant\mu^*E$. 若 $E\in\mathfrak{A}$，则 $\mu_*E=\mu E$.

证明　由于
$$\mu A\leqslant\mu^*(A\cap E)+\mu^*(A\cap\tilde{E}),$$
我们有
$$\mu A-\mu^*(A\cap\tilde{E})\leqslant\mu^*(A\cap E)\leqslant\mu^*E.$$
因此，$\mu_*E\leqslant\mu^*E$.

若 $E\in\mathfrak{A}$，在 μ_* 的定义中取 $A=E$，则 $\mu_*E\geqslant\mu E=\mu^*E$. ■

28. 引理　若 $E\subset F$，则 $\mu_*E\leqslant\mu_*F$.

证明　若 $\mu^*(A\sim E)<\infty$，则 $\mu^*(A\sim F)<\infty$，因而
$$\mu_*F\geqslant\mu A-\mu^*(A\sim F)\geqslant\mu A-\mu^*(A\sim E).$$
对于所有满足 $\mu^*(A\sim E)<\infty$ 的 $A\in\mathfrak{A}$ 取上确界，我们有 $\mu_*F\geqslant\mu_*E$. ■

使用内测度的定义的困难之一是我们必须对满足 $\mu^*(A\sim E)<\infty$ 的所有 A 取 $\mu A-\mu^*(A\sim E)$　318

的上确界. 下一个引理表明该表达式在 A 中是单调的，因而这使我们更易于计算 $\mu_* E$.

29. 引理　令 A 和 B 为 $\mathfrak{A}$ 中满足 $\mu^*(A\sim E)<\infty$ 与 $\mu^*(B\sim E)<\infty$ 的两个集合. 若 $A\subset B$，我们有 $\mu A-\mu^*(A\sim E)\leqslant\mu B-\mu^*(B\sim E)$. 若也有 $E\subset A$，则我们有等式，因此 $\mu_* E=\mu A-\mu^*(A\sim E)$.

证明　由于 $B\sim E\subset(B\sim A)\cup(A\sim E)$，因此有 $\mu^*(B\sim E)\leqslant\mu(B\sim A)+\mu^*(A\sim E)$. 若$E\subset A$，则这个并集是一个不相交的并集且 $B\sim A$ 的可测性给出等式. 由于 $\mu B=\mu A+\mu(B\sim A)$，因此若 $E\subset A$，我们有

$$\mu B-\mu^*(B\sim E)\geqslant\mu A-\mu^*(A\sim E)$$

这个引理和它的系表明，若 μ 是一个有限测度，那么 $\mu_* E=\mu X-\mu^*\widetilde{E}$. 在这种情形下，内测度理论和性质的建立相对直接. 本节处理内测度的复杂之处在于有运用于非 σ 有限测度的概念. ■

30. 系　若 $A\in\mathfrak{A}$，则 $\mu A=\mu_*(A\cap E)+\mu^*(A\cap\widetilde{E})$.

证明　如果 $\mu^*(A\cap\widetilde{E})=\infty$，那么 $\mu A=\infty$无需证明. 否则，设 $F=A\cap E$，那么 $A\sim F=A\cap\widetilde{E}$，且 $\mu_* F=\mu A-\mu^*(A\cap\widetilde{E})$，这是由于 $F\subset A$ 且 $\mu^*(A\sim F)<\infty$. ■

31. 引理　令 B 为 μ^* 可测集满足 $\mu^* B<\infty$，那么 $\mu_* B=\mu^* B$.

证明　由于 $\mu^* B<\infty$，因此给定 $\varepsilon>0$，存在 $A\in\mathfrak{A}$满足 $\mu^*(B\sim A)<\varepsilon$(习题 7). 由于 A 可测，因此

$$\mu^* B=\mu^*(A\cap B)+\mu^*(B\cap\widetilde{A})$$

因而

$$\mu^*(A\cap B)>\mu^* B-\varepsilon.$$

现在

319

$$\mu_* B\geqslant\mu A-\mu^*(A\cap\widetilde{B})=\mu^*(A\cap B),$$

这是由于 B 可测. 因此

$$\mu^* B\geqslant\mu_* B>\mu^* B-\varepsilon,$$

令 $\varepsilon\to 0$ 得到引理. ■

命题 6 叙述的是每个具有有限外测度的集合包含于具有相同外测度的 $\mathfrak{A}_{\sigma\delta}$. 以下命题是命题 6 关于内测度的类比.

32. 命题　令 E 为满足 $\mu_* E<\infty$的集合，那么存在一个集合 $H\in\mathfrak{A}_{\delta\sigma}$使得 $H\subset E$ 且 $\bar{\mu}H=\mu_* E$.

证明　令 A_n 为$\mathfrak{A}$中满足 $\mu^*(A_n\sim E)<\infty$的集合使得 $\mu A_n-\mu^*(A_n\sim E)>\mu_* E-1/n$. 根据命题 6，存在 $G_n\in\mathfrak{A}_{\sigma\delta}$使得 $G_n\supset A_n\sim E$ 及 $\bar{\mu}G_n=\mu^*(A_n\sim E)$. 令 $H_n=A_n\sim G_n$，那么 $H_n\in\mathfrak{A}_{\delta\sigma}$且 $H_n\subset E$. 此外，$\bar{\mu}H_n=\mu A_n-\bar{\mu}G_n>\mu_* E-1/n$. 因此若我们取 $H=\bigcup H_n$ 则命题得证. ■

33. 系　若 $\mu_* E<\infty$，则

$$\mu_* E=\sup\{\bar{\mu}B:B\subset E,B\text{ 可测},\text{且 }\bar{\mu}B<\infty\}.$$

34. 命题　假定 $\mu^* E<\infty$，那么 E 可测当且仅当 $\mu_* E=\mu^* E$.

证明　假设 $\mu_* E=\mu^* E<\infty$，那么命题 6 和 32 给出可测集 G 和 H 满足 $G\subset E\subset H$ 与 $\bar{\mu}H=\bar{\mu}G$. 因此 E 与可测集仅在一个零测度集不同，因此是可测的. 逆陈述正是引理 31. ■

35. 定理　令 E 和 F 为不相交的集合，那么

$$\mu_* E+\mu_* F \leqslant \mu_*(E \cup F) \leqslant \mu_* E+\mu^* F \leqslant \mu^*(E \cup F) \leqslant \mu^* E+\mu^* F.$$

证明 若 $\mu_* E$ 或 $\mu_* F$ 无限，则第一个不等式由 μ_* 的单调性得到. 若 $\mu_* E$ 和 $\mu_* F$ 都是有限的，则令 G 和 H 为满足 $G \subset E$ 且 $H \subset F$ 的可测集使得 $\bar{\mu} G=\mu_* E$ 及 $\bar{\mu} H=\mu_* F$，那么 $G \cup H$ 是包含于 $E \cup F$ 的具有有限外测度的可测集. 因此 320

$$\begin{aligned}\mu_*(E \cup F) \geqslant \mu_*(G \cup H) &= \bar{\mu}(G \cup H) \\ &= \bar{\mu} G+\bar{\mu} H \\ &= \mu_* E+\mu_* F,\end{aligned}$$

证明了第一个不等式.

若 $\mu^* F=\infty$，则第二个不等式是平凡的. 若 $\mu^* F<\infty$，则令 A 属于 $\mathfrak{a}$ 满足 $\mu^*(A \sim(E \cup F))<\infty$. 由于 $A \sim E \subset[A \sim(E \cup F)] \cup F$，我们有

$$\mu^*(A \sim E) \leqslant \mu^*(A \sim(E \cup F))+\mu^* F.$$

因此 $\mu^*(A \sim F)<\infty$，且

$$\begin{aligned}\mu A-\mu^*(A \sim(E \cup F)) &\leqslant \mu A-\mu^*(A \sim E)+\mu^* F \\ &\leqslant \mu_* E+\mu^* F.\end{aligned}$$

对 A 取上确界，我们得到

$$\mu_*(E \cup F) \leqslant \mu_* E+\mu^* F.$$

为证明第三个不等式，我们选取满足 $\bar{\mu} G=\mu_* E$ 的可测集 $G \subset E$，那么 G 的可测性蕴涵

$$\begin{aligned}\mu_* E+\mu^* F &= \bar{\mu} G+\mu^* F \\ &= \mu^*(G \cup F) \\ &\leqslant \mu^*(E \cup F).\end{aligned}$$

最后一个不等式正是外测度的次加性. ■

36. 系 若 $\langle E_i\rangle$ 是不相交的集合序列，则

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu_* E_i \leqslant \mu_*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right).$$

证明 设 $E=\bigcup E_i$. 反复使用定理 35 的第一个不等式，我们得到

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \mu_* E_i &\leqslant \mu_*\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) \\ &\leqslant \mu_* E.\end{aligned}$$

令 n 趋于 ∞ 则得到系. ■

以下引理表达了 μ_* 在 $\mathfrak{a}$ 内由不相交集合序列给出的分解上的加性，相应的结果对外测度也成立即使仅假定 A_i 可测(见习题 2 和 46e). 321

37. 引理 令 $\langle A_i\rangle$ 为属于 $\mathfrak{a}$ 的不相交集合序列，那么

$$\mu_*\left(E \cap \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty} \mu_*(E \cap A_i).$$

证明 由于可以用 $E \cap \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ 代替 E，我们可以假定 $E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i=C$. 令 $B \in \mathfrak{a}$ 满足

$\mu^*(B\sim E)<\infty$. 由于 C 是 μ^* 可测，因此

$$\mu B=\mu^*(B\cap C)+\mu^*(B\cap\tilde{C})$$

且由于 $\tilde{C}\subset\tilde{E}$，因而

$$\begin{aligned}\mu^*(B\cap\tilde{E})&=\mu^*(B\cap C\cap\tilde{E})+\mu^*(B\cap\tilde{E}\cap\tilde{C})\\&=\mu^*(B\cap C\cap\tilde{E})+\mu^*(B\cap\tilde{C}),\end{aligned}$$

因此 $\mu^*(B\cap\tilde{C})\leqslant\mu^*(B\cap\tilde{E})<\infty$，因而根据习题 2

$$\begin{aligned}\mu B-\mu^*(B\sim E)&=\mu^*(B\cap C)-\mu^*(B\cap\tilde{E}\cap C)\\&=\sum\mu(A_i\cap B)-\mu^*(B\cap\tilde{E}\cap C).\end{aligned}$$

因此

$$\mu B-\mu^*(B\sim E)\leqslant\sum\mu_*(A_i\cap E).$$

对 B 取上确界给出

$$\mu_*E\leqslant\sum\mu_*(A_i\cap E).$$

相反的不等式由系 36 得到. ■

38. 定理　令 μ 为 X 的子集的代数 $\mathfrak{A}$ 上的测度且 E 是 X 的任意子集. 若 $\mathcal{B}$ 是由 $\mathfrak{A}$ 和 E 生成的代数且 $\tilde{\mu}$ 是 μ 到 $\mathcal{B}$ 的任意延拓，那么

$$\mu_*E\leqslant\tilde{\mu}E\leqslant\mu^*E.$$

322　此外，存在 μ 到 $\mathcal{B}$ 的延拓(因此也是到由 $\mathcal{B}$ 生成的 σ 代数) $\bar{\mu}$ 和 $\underline{\mu}$ 使得 $\bar{\mu}E=\mu^*E$ 且 $\underline{\mu}E=\mu_*E$.

证明　若 $\langle A_i\rangle$ 是 $\mathfrak{A}$ 的任意不相交集合序列满足 $E\subset\bigcup A_i$，则 $E=\bigcup(A_i\cap E)$，因而

$$\tilde{\mu}E=\sum_{i=1}^{\infty}\tilde{\mu}(A_i\cap E)\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}\mu A_i.$$

因此 $\tilde{\mu}E\leqslant\mu^*E$.

若 A 是 $\mathfrak{A}$ 的任意集满足 $\mu^*(A\sim E)<\infty$，则 $\tilde{\mu}(A\sim E)\leqslant\mu^*(A\sim E)$，且

$$\begin{aligned}\mu A-\mu^*(A\sim E)&\leqslant\mu A-\tilde{\mu}(A\sim E)=\tilde{\mu}(E\cap A)\\&\leqslant\tilde{\mu}E.\end{aligned}$$

因此 $\mu_*E\leqslant\tilde{\mu}E$.

$\mathcal{B}$ 内的集合 B 是形如 $B=(A\cap E)\cup(A'\cap\tilde{E})$ 的集合，其中 A 和 A' 属于 $\mathfrak{A}$，这是由于所有这种形式的集合构成的集簇是包含于 $\mathcal{B}$ 的代数且包含 $\mathfrak{A}$ 和 E. 对于每个 $B\in\mathcal{B}$ 定义 $\bar{\mu}$ 和 $\underline{\mu}$ 如下：

$$\bar{\mu}B=\mu^*(B\cap E)+\mu_*(B\cap\tilde{E})$$

与

$$\underline{\mu}B=\mu_*(B\cap E)+\mu^*(B\cap\tilde{E}).$$

那么 $\bar{\mu}$ 和 $\underline{\mu}$ 是定义在 $\mathcal{B}$ 上单调的非负函数，根据系 30，对于 $A\in\mathfrak{A}$ 有 $\bar{\mu}A=\underline{\mu}A=\mu A$. 因此若我们能证明 $\bar{\mu}$ 和 $\underline{\mu}$ 在 $\mathcal{B}$ 上是可数加性的则定理得证. 但这容易从习题 2 和引理 37 得到. ■

习题

39. a. 若 $\mu X<\infty$，则 $\mu_*E=\mu X-\mu^*(\tilde{E})$.

b. 若$\mathcal{A}$是σ代数，则

$$\mu^* E = \inf\{\mu A : E \subset A, A \in \mathcal{A}\}$$

且

$$\mu_* E = \sup\{\mu A : A \subset E, A \in \mathcal{A}\}.$$

c. 若μ是$\mathbf{R}$上的勒贝格测度，则$\mu_* E=\sup\{\mu F: F\subset E, F$ 闭$\}$.

40. 证明定理 38 的测度$\bar{\mu}$和$\underline{\mu}$在$\mathcal{B}$上是可数加性的. 323

41. 令μ为代数$\mathcal{A}$上的测度，且令E为μ^*可测集，证明定理 8 定义的测度$\bar{\mu}$有性质：对于所有$B\in\mathcal{B}$，$\bar{\mu}B=\mu^* B$. 因此$\bar{\mu}$在$\mathcal{B}$上与由卡拉泰奥多理延拓过程给出的测度一致.

42. 令E为任意集. 一个可测集$G\subset E$称为E的*可测核*，若$\mu_*(E\sim G)=0$，一个可测集$H\supset E$称为E的*可测覆盖*，若$\mu_*(H\sim E)=0$.

a. 证明E的任何两个可测核(或覆盖)仅差一个零集.

b. 证明若E是具有σ有限外测度的集合，则E有一个可测核和一个可测覆盖.

43. a. 令P为 3.4 节中构造的不可测集合，证明$\mu_* P=0$(参见习题 3.15).

b. 令$E=[0, 1]\sim P$，那么$\mu^* E=1$，且若$A\cap[0, 1]$是一个可测集，则$m^*(A\cap E)=mE$.

c. 若$A\subset[0, 1]$是一个可测集，则$A\cap E$的可测包是A.

44. 令μ为代数$\mathcal{A}$上的测度且E是一个满足$\mu^* E<\infty$的集合. 若β是满足$\mu_* E\leqslant\beta\leqslant\mu^* E$的任何实数，则存在$\mu$的到包含$\mathcal{A}$和$E$的$\sigma$代数的延拓$\tilde{\mu}$使得$\tilde{\mu}E=\beta$.

45. a. 若μ是代数$\mathcal{A}$上的半有限测度且$\mathcal{B}$是包含$\mathcal{A}$的最小σ代数，则μ_*限制于$\mathcal{B}$是半有限测度且是μ到$\mathcal{B}$的最小延拓.

b. 可以存在多于一个μ到$\mathcal{B}$的半有限延拓.（例如，令$X=\mathbf{N}\cup\{\omega\}$且$\mathcal{A}$是由$\mathbf{N}$的有限子集生成的代数，其中$\mu$是计数测度.）

46. 令$\mathcal{A}$为$\mathbf{R}$的半开区间的有限并集的代数，令$\mu\varnothing=0$，且对$A\neq 0$，$\mu A=\infty$. 博雷尔集类$\mathcal{B}$是包含$\mathcal{A}$的最小σ代数.

a. 证明若$E\neq\varnothing$，则$\mu^* E=\infty$.

b. 证明若E不包含区间则$\mu_* E=0$，而若E包含一个区间则$\mu_* E=\infty$.

c. μ_*到$\mathcal{B}$的限制不是一个测度，因此不存在μ到$\mathcal{B}$的最小延拓.

d. $\mathcal{B}$上的计数测度是一个μ到$\mathcal{B}$的延拓.

e. 证明若我们用“可测集”代替“属于$\mathcal{A}$的集合”则引理 37 不再正确.

47. 若μ^*不是正则外测度(即不是在代数上的测度)，则我们不能通过设$\mu_* E=\mu^* X-\mu^*(\tilde{E})$得到内测度的合理的理论. 令$X=\{a, b, c\}$，且设$\mu^* X=2$，$\mu^*\varnothing=0$，且若$E$不是$X$或$\varnothing$则$\mu^* E=1$. 324

a. 计算μ_*.

b. X的可测子集是什么?

c. 证明存在非可测集合E满足$\mu_* E=\mu^* E$.

d. 证明定理 35 的第一与第三个不等式不成立.

48. 令$X=\mathbf{R}^2$且$\mathcal{A}$为由所有形如$I=\{\langle x, y\rangle: a<y\leqslant b\}$的垂直区间的不相交并集组成的代数，令$\mu A$为组成$A$的区间长度的和，那么$\mu$是一个$\mathcal{A}$上的测度. 令$E=\{\langle x, y\rangle: y=0\}$.

a. 证明 $\mu^* E=\infty$，$\mu_* E=0$.

b. 证明 E 的每个子集是一个 $\mathfrak{A}_\delta$.

c. 假定不存在定义在 $\mathcal{P}(\mathbf{R})$ 上的有限非原子的测度，证明 μ 到 σ 代数的测度的每个延拓必须赋予 E 以值 0 或 ∞.

*12.7 零测度集的延拓

12.2 节的结果允许我们把代数 $\mathfrak{A}$ 上的测度 μ 延拓到包含 $\mathfrak{A}$ 的 σ 代数，12.6 节的结果允许把 $\mathfrak{A}$ 延拓到包含 $\mathfrak{A}$ 和一个附加集合的 σ 代数. 有时能够把测度延拓到包含 $\mathfrak{A}$ 和一个 X 的子集簇 $\mathfrak{M}$ 的 σ 代数且该延拓使得 $\mathfrak{M}$ 内的每个集合有零测度是有用的. 这个延拓成为可能的一个必要条件是只要我们有一个集 $A\in\mathfrak{A}$ 使得 $A\subset M\in\mathfrak{M}$，那么 $\mu A=0$. 这个条件一般不是充分的，但若我们假定 $\mathfrak{M}$ 在可数并下封闭，则这个条件是充分的.

39. 命题 *令 μ 为 X 的子集的 σ 代数 $\mathfrak{A}$ 上的测度，且令 $\mathfrak{M}$ 为 X 的子集簇其在可数并下封闭且具有性质：对于每个满足 $A\subset M\in\mathfrak{M}$ 的 $A\in\mathfrak{A}$，我们有 $\mu A=0$，那么存在 μ 到包含 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{M}$ 的最小 σ 代数 $\mathcal{B}$ 的延拓 $\bar{\mu}$ 使得对于每个 $M\in\mathfrak{M}$，$\bar{\mu}M=0$.*

证明 由于作为 $\mathfrak{M}$ 中的集合的子集的集簇满足 $\mathfrak{M}$ 的假设，我们可以假定每个 $\mathfrak{M}$ 中的集合的子集本身属于 $\mathfrak{M}$. 有了这个假设，集簇 $\mathcal{B}=\{B: B=A\Delta M, A\in\mathfrak{A}, M\in\mathfrak{M}\}$ 是一个包含 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{M}$ 的 σ 代数，且由于每个包含 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{M}$ 的 σ 代数包含 $\mathcal{B}$，因此 $\mathcal{B}$ 是一个包含 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{M}$ 的最小 σ 代数.

若 $B=A_1\Delta M_1=A_2\Delta M_2$，则 $A_1\Delta A_2=M_1\Delta M_2$，因而 $\mu(A_1\Delta A_2)=0$. 因此 $\mu A_1=\mu A_2$，且若我们定义 $\bar{\mu}B$ 为 μA_1，则 $\bar{\mu}$ 是 $\mathcal{B}$ 上的良定义且是 μ 的一个延拓. 剩下的仅需证明 $\bar{\mu}$ 是可数加性的.

令 $B=\bigcup B_i$，$B_i\cap B_j=\varnothing$. 若 $B_i=A_i\Delta M_i$，则 $A_i\Delta A_j\in\mathfrak{M}$. 设 $A'_n=A_n\cap\widetilde{A}_1\cap\cdots\cap\widetilde{A}_{n-1}$，我们有 $A'_i\cap A'_j=\varnothing$，且 $A_n\Delta A'_n\in\mathfrak{M}$，因此 $B_i=A'_i\Delta M'_i$，且 $B=A\Delta M$，其中 $A=\bigcup A'_i$，$M\subset\bigcup M'_i$. 因此 $\bar{\mu}B=\mu A=\sum\mu A'_i=\sum\bar{\mu}B_i$. ∎

我们观察到对于每个满足 $A\subset M$ 的 $A\in\mathfrak{A}$，$\mu A=0$ 的条件仅仅说的是 $\mu_* M=0$，因此命题说的是我们能够把 μ 的定义域延拓为包含任何内测度为零的集簇 $\mathfrak{M}$，假定 $\mathfrak{M}$ 在可数并封闭的话. 注意到在由 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{M}$ 生成的 σ 代数上我们有 $\bar{\mu}=\mu_*$，因此这个命题给出完备化过程的推广，该过程通过添加外测度为零的集合将一个测度的定义域延拓.

习题

49. 令 $\mathfrak{A}$ 为 X 上的 σ 代数，$\mathfrak{M}$ 是 X 的子集簇，在可数并下闭且具有性质：$\mathfrak{M}$ 内的集合的每个子集属于 $\mathfrak{M}$. 证明集簇

$$\mathcal{B}=\{B:B=A\Delta M, A\in\mathfrak{A}, M\in\mathfrak{M}\}$$

是一个 σ 代数.

50. 证明若 $\mathfrak{A}$ 仅是一个集代数，则命题 39 不一定成立.

12.8 卡拉泰奥多里外测度

令 X 为点集且 Γ 是其上的实值函数集. 一个有趣的问题是在何条件下外测度 μ^* 具有性质：每个属于 Γ 的函数可测，本节的目标就是证明该性质成立的一个充分性准则.

两个集合可被函数 φ 分离若存在数 a 和 b 满足 $a>b$ 使得 φ 在一个集合上比 a 大而在另一个集合上比 b 小. 外测度 μ^* 称为关于 Γ 的**卡拉泰奥多里外测度**，若它满足以下公理：

iv. 若 A 和 B 是两个可被 Γ 内的某个函数分离的集合，则 $\mu^*(A\cup B)=\mu^*A+\mu^*B$.

40. 命题 若 μ^* 为关于 Γ 的卡拉泰奥多里外测度，则 Γ 内的每个函数 μ^* 可测.

证明 给定实数 a 和函数 $\varphi\in\Gamma$，我们必须证明集合

$$E=\{x:\varphi(x)>a\}$$

是 μ^* 可测，或等价地，给定任意集合 A，有

$$\mu^*A\geqslant\mu^*(A\cap E)+\mu^*(A\cap\tilde{E}).$$

由于当 $\mu^*A=\infty$ 时，这个不等式是平凡的，因此我们假定 $\mu^*A<\infty$.

首先设 $B=E\cap A$，$C=\tilde{E}\cap A$，且

$$B_n=\left\{x:(x\in B)\ \&\ \left(\varphi(x)>a+\frac{1}{n}\right)\right\}.$$

定义 $R_n=B_n\sim B_{n-1}$，我们有

$$B=B_n\cup\left[\bigcup_{k=n+1}^{\infty}R_k\right].$$

现在在 B_{n-2} 上我们有 $\varphi>a+1/(n-2)$，而在 R_n 上我们有 $\varphi\leqslant a+1/(n-1)$，因此 φ 分离 R_n 和 B_{n-2} 且因此分离 R_{2k} 和 $\bigcup_{j=1}^{k-1}R_{2j}$，这是由于后一集合包含于 B_{2k-2}. 因此根据归纳，

$$\mu^*\left[\bigcup_{j=1}^{k}R_{2j}\right]=\mu^*R_{2k}+\mu^*\left[\bigcup_{j=1}^{k-1}R_{2j}\right]$$

$$=\sum_{j=1}^{k}\mu^*R_{2j},$$

由于

$$\sum_{j=1}^{k}R_{2j}\subset B\subset A,$$

我们有

$$\sum_{j=1}^{k}\mu^*R_{2j}\leqslant\mu^*A,$$

因而级数 $\sum_{j=1}^{\infty}\mu^*R_{2j}$ 收敛.类似地,级数

$$\sum_{j=1}^{\infty}\mu^*R_{2j+1}$$

收敛，因此级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}\mu^*R_k.$$

也收敛.

从这里可得到，给定 $\varepsilon>0$，我们可以选取 n 充分大使得

327

$$\sum_{k=n}^{\infty}\mu^* R_k<\varepsilon.$$

那么根据 μ^* 的次加性，

$$\mu^* B\leqslant \mu^* B_n+\sum_{k=n+1}^{\infty}\mu^* R_k$$
$$<\mu^* B_n+\varepsilon$$

或

$$\mu^* B_n>\mu^* B-\varepsilon.$$

现在

$$\mu^* A\geqslant \mu^*(B_n\cup C)$$
$$=\mu^* B_n+\mu^* C$$

这是由于 φ 分离 B_n 和 C. 因此，

$$\mu^* A\geqslant \mu^* B+\mu^* C-\varepsilon.$$

由于 ε 是任意正量，因此

$$\mu^* A\geqslant \mu^* B+\mu^* C.$$ ■

41. 命题 令 (X, ρ) 为度量空间，且令 μ^* 为 X 上的外测度具有性质：只要 $\rho(A, B)>0$ 就有 $\mu^*(A\cup B)=\mu^* A+\mu^* B$，那么每个闭集(因此每个博雷尔集)关于 μ^* 可测.

328

若度量空间 X 的子集上的外测度 μ^* 满足性质：只要 $\rho(A, B)>0$ 就有 $\mu^*(A\cup B)=\mu^* A+\mu^* B$，则称为对 X 的卡拉泰奥多里外测度或度量外测度.

习题

51. 证明命题 41. [令 Γ 为形如 $\varphi(x)=\rho(x, E)$ 的函数 φ 的集合. 证明 μ^* 关于 Γ 满足(iv)，且注意到对于一个闭集 F 我们有 $F=\{x: \rho(x, F)\leqslant 0\}$.]

12.9 豪斯多夫测度

谈到度量空间 X 上的博雷尔测度，我们指的是定义在包含 X 内的博雷尔集的 σ 代数的某个 σ 代数上的测度. 对于每个正实数 α 我们定义一个特殊的博雷尔测度 m_α. 称为 X 上的 α 维豪斯多夫测度. 这些测度对于欧几里得空间 $\mathbf{R}^n$ 有着特殊的重要性，但他们的理论很容易推广到任意度量空间 X.

为定义 m_α，我们取 $\varepsilon>0$ 且设

$$\lambda_\alpha^{(\varepsilon)}(E)=\inf\sum_{i=1}^{\infty}r_i^\alpha,$$

其中 $\langle r_i\rangle$ 是覆盖 E 的球序列 $\langle B_i\rangle$ 的半径且 $r_i<\varepsilon$. 观察到当 ε 递减时 $\lambda_\alpha^{(\varepsilon)}$ 递增. 当 $\varepsilon\to 0$ 时设

$$m_\alpha^* E=\sup\lambda_\alpha^{(\varepsilon)}(E),$$

那么我们有

$$m_\alpha^* E=\lim_{\varepsilon\to 0}\lambda_\alpha^{(\varepsilon)}(E).$$

容易证明 m_α^* 是可数次加性的且因此是一个外测度. 若 E 和 F 是 X 的两个子集满足

$\rho(E, F)>\delta$，则只要 $\varepsilon<\delta$ 就有

$$\lambda_\alpha^{(\varepsilon)}(E\cup F)\geqslant\lambda_\alpha^{(\varepsilon)}(E)+\lambda_\alpha^{(\varepsilon)}(F)$$

这是因为若 $\langle B_i\rangle$ 是覆盖 $E\cup F$ 的半径小于 ε 的球序列，则不存在同时与 E 和 F 相交的球．当 $\varepsilon\to 0$ 时取极限，我们有 329

$$m_\alpha^*(E\cup F)\geqslant m_\alpha^*E+m_\alpha^*F.$$

因此根据命题 41，m_α^* 诱导一个 X 上的博雷尔测度 m_α．测度 m_α 称为豪斯多夫 α 维测度．

习惯上通过除于常数

$$\pi_\alpha=\frac{2\pi^{\alpha/2}}{\alpha\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

来规范 m_α．因此 $\pi_1=2$，$\pi_2=\pi$，$\pi_3=4\pi/3$，且 π_n 是 $\mathbf{R}^n$ 的单位球的体积，我们称这个测度为规范的豪斯多夫测度．在 $\mathbf{R}^n$ 中规范的豪斯多夫测度 m_n 等于勒贝格测度．

习题

52. 证明 μ_α^* 是可数次加性的．

53. a. 证明 $\mathbf{R}^n$ 的豪斯多夫测度 m_α 是平移不变的；即若 $F=E+y$，E 是博雷尔集，则 $m_\alpha F=m_\alpha E$．

    b. 证明在 $\mathbf{R}^n$ 中测度 m_α 在欧几里得运动(旋转与平移)下不变．

54. 令 E 为 $[0, 1]$ 在 $\mathbf{R}^n$(或一个度量空间)中的一对一连续像，那么 E 的规范的一维豪斯多夫测度是它的长度．

55. 令 E 为某个度量空间 X 的博雷尔子集．

    a. 证明若对于某个 α，$m_\alpha E$ 有限，则对于所有满足 $0<\beta<\alpha$ 的 β，$m_\beta E=0$．

    b. 证明若对于某个 α，$m_\alpha E>0$，则对于所有满足 $\beta>\alpha$ 的 β，$m_\beta E=\infty$．

    c. E 的豪斯多夫维数定义为

    $$\dim_{\text{Haus}}E=\inf\{\alpha: m_\alpha E=\infty\}$$

    或

    $$\dim_{\text{Haus}}E=\sup\{\beta: m_\beta E=0\}.$$

    证明这两个定义是相同的．

    d. 证明康托尔三分点集的豪斯多夫维数是 $\log 2/\log 3$． 330

第 13 章 测度与拓扑

我们常常关注当集合 X 也是拓扑空间时其上的测度，很自然地考虑在测度上施加条件使得它可与拓扑结构联系. 看来有两类拓扑空间可给出合理的理论. 一类是局部紧豪斯多夫空间，本章对该类建立理论. 另一类是完备度量空间，第 15 章讨论该类在测度理论方面的一些重要意义.

13.1 贝尔集与博雷尔集

令 X 为局部紧豪斯多夫空间. 从积分理论的观点来看，X 上最有用的函数族是由在 X 的紧子集外消失的所有连续实值函数组成的族 $C_c(X)$. 若 f 是实值函数，f 的支撑是集合 $\{x: f(x)\neq 0\}$ 的闭包. 因此 $C_c(X)$ 是 X 上的所有具有紧支撑的连续实值函数类. **贝尔集**类定义为使得 $C_c(X)$ 的每个函数关于 $\mathcal{B}$ 可测的 X 的子集的最小 σ 代数 $\mathcal{B}$. 因此 $\mathcal{B}$ 是一个由集合 $\{x: f(x)\geqslant\alpha\}$ 生成的 σ 代数，其中 $f\in C_c(X)$. 若 $\alpha>0$，则这些集合是紧 G_δ. 根据命题 9.15，每个紧 G_δ 是贝尔集. 因此 $\mathcal{B}$ 是一个由紧 G_δ 生成的 σ 代数. 331

若 X 是任意拓扑空间，则包含闭集的最小 σ 代数称为**博雷尔集**类. 因此，若 X 局部紧，则每个贝尔集是博雷尔集. 当 X 是局部紧可分度量空间时反过来也成立，但存在紧空间，在该空间中博雷尔集类比贝尔集类大(习题 6).

我们常常将 X 上的贝尔集类和博雷尔集类分别记为 $\mathcal{B}a(X)$ 和 $\mathcal{B}o(X)$.

在本章的其余部分我们始终假定 X 为局部紧豪斯多夫空间.

谈到 X 上的**贝尔测度**，我们指的是对于所有贝尔集定义并且对于每个紧贝尔集有限的测度. 由于我们倾向于关于完备测度的积分，所以将常常处理这样一种测度的完备化，我们仍然称它为贝尔测度. 谈到**博雷尔测度**，我们指的是定义在博雷尔集的 σ 代数上的测度或者这样一种测度的完备化. 我们也假定本章考虑的所有博雷尔测度在紧集上取有限值.

局部紧豪斯多夫空间内的集合 E 称为(拓扑)**有界**，若 E 包含于某个紧集，即 $\bar{E}$ 是紧的. 我们应该把这个概念与度量空间的(度量)有界子集的概念区分开来. 对于 $\mathbf{R}^n$ 的子集这两个概念是一致的，更一般地讲对于任何度量为适当的度量空间这两个概念一致(见习题 9.31). 一个集合 E 称为 **σ 有界**，若它是可数有界集簇的并集. 回顾一个集合为 σ 紧，若它是可数紧集的并集. 容易看出一个集合 E 是 σ 有界当且仅当它包含于一个 σ 紧集.

我们叙述用以处理贝尔集与博雷尔集的一些引理，它们中许多的证明留给读者.

1. 引理 令 K 为紧集，O 是一个满足 $K\subset O$ 的开集，那么

$$K\subset U\subset H\subset O,$$

其中 U 是 σ 紧开集且 H 是一个紧 G_δ.

332 **2. 引理** 每个 σ 紧开集是可数紧 G_δ 集簇的并集，因此是贝尔集.

3. 引理 每个有界集包含于一个紧 G_δ，每个 σ 有界集 E 包含于一个 σ 紧开集 O. 若 E 有界，我们可以取 $\bar{O}$ 为紧.

4. 引理 令$\mathcal{R}$为集合的环，且令$\mathcal{R}'=\{E: \widetilde{E}\in\mathcal{R}\}$，那么或者$\mathcal{R}=\mathcal{R}'$或者$\mathcal{R}\cap\mathcal{R}'=0$. 在后一种情形中$\mathcal{R}\cup\mathcal{R}'$是包含$\mathcal{R}$的最小代数. 若$\mathcal{R}$是$\sigma$环，则$\mathcal{R}\cup\mathcal{R}'$是一个$\sigma$代数.

这个引理本质上是习题 11.9a. 为运用于本章读者应该研究该习题的内容.

5. 引理 若E是一个贝尔集，则E或$\widetilde{E}$为σ有界. 当且仅当X是σ紧时它们都是σ有界.

6. 引理 σ有界贝尔集类是包含紧G_δ的最小σ环.

7. 引理 每个σ有界贝尔集是可数不相交的有界贝尔集并集的并集.

以下命题给出了一个将关于紧空间的贝尔集与博雷尔集的定理运用于局部紧空间的有界贝尔集与博雷尔集的有用方法.

8. 命题 令F为X的闭子集，那么F是局部紧豪斯多夫空间，且F的贝尔集是那些形如$B\cap F$的集合，其中B是X的贝尔集. 因此若F是闭的贝尔集，则F的贝尔子集恰好是X的那些包含于F的贝尔子集. F的博雷尔集是X的那些包含于F的博雷尔集.

证明 令$\mathfrak{a}=\{E: E=B\cap F, B\in\mathcal{B}a(X)\}$，那么$\mathfrak{a}$是一个包括所有包含于$F$的紧$G_\delta$的$\sigma$代数. 因此$\mathcal{B}a(F)\subset\mathfrak{a}$，且$F$的每个贝尔集形如$B\cap F$. 令$\mathcal{B}=\{E\subset X: E\cap F\in\mathcal{B}a(F)\}$，那么$\mathcal{B}$是一个$\sigma$代数. 令$K$为$X$内的紧$G_\delta$，那么$K\cap F$是$K$的闭子集，因此是紧的. 由于$K$是$X$内的紧$G_\delta$，$K\cap F$是$F$内的紧$G_\delta$，因此$K\cap F$是$F$的紧$G_\delta$，因而它属于$\mathcal{B}a(F)$. 从而$\mathcal{B}a(X)\subset\mathcal{B}$，且$X$的每个贝尔集在$F$的贝尔集与$F$相交.

若F是X的闭贝尔子集，则只要B是X的贝尔子集，$B\cap F$就是X的贝尔子集. 因此F的每个贝尔子集都具有这种形式. 另一方面，对于X的每个贝尔子集B满足$B\subset F$，我们有$B=B\cap F$，因而B是F的贝尔子集. 333

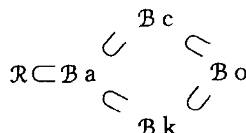
用$\mathcal{B}o$取代$\mathcal{B}a$，且利用F是博雷尔集这一事实可类似地建立关于博雷尔集的论断. ■

以下引理在证明一个集合E是博雷尔集时是有用的.

9. 引理 令E为X的子集使得对于每个紧集K，$E\cap K$是博雷尔集，那么E是博雷尔集.

我们告诫读者关于贝尔集和博雷尔集的术语没有彻底标准化. 一些作者取贝尔集类为使得X上的所有连续实值函数可测的最小σ代数$\mathcal{B}c(X)$. 其他作者则限制博雷尔集类为包含紧集的最小σ代数$\mathcal{B}k(X)$. 在σ环做测度论的作者(例如 Halmos[5])常常取贝尔集为包含紧G_δ集的最小σ环$\mathcal{R}$且取博雷尔集为包含紧集的最小σ环$\mathcal{S}$. 在阅读论及贝尔和博雷尔集或者测度的著作时，仔细检验作者所指的贝尔或博雷尔集是什么是很有必要的. 一个给定的命题对一种用法是正确的，而对另一种用法则是错误的.

以下公式给出了几个类的一些包含关系：



我们有$\mathcal{B}a=\mathcal{B}c\cap\mathcal{B}k$，且$\mathcal{B}o$是包含$\mathcal{B}c$和$\mathcal{B}k$的最小$\sigma$代数. σ环$\mathcal{R}$恰好是σ有界贝尔集的σ环，且$\mathcal{S}$是σ有界博雷尔集类. 若X紧(或σ紧和局部紧)，则

$$\mathcal{R}=\mathcal{B}a=\mathcal{B}c,\quad \mathcal{S}=\mathcal{B}k=\mathcal{B}o.$$

若X可度量化(或者甚至像流形那样可局部度量化)，则有

334

$$\mathcal{R}=\mathcal{S},\quad \mathcal{B}a=\mathcal{B}k,\quad \mathcal{B}c=\mathcal{B}o.$$

若 X 是局部紧可分度量空间，则所有这些类等同.

这里我们所采用的博雷尔集类的定义是最有用和最方便的一种，它被广泛使用且对于度量空间是标准的. 另一方面，关于贝尔集的定义可能不像取包含紧 G_δ 的最小 σ 环的定义那样方便. 我们之所以没这么做是因为我们选择在 σ 代数而非 σ 环做测度论. 我们付出的代价是无数关于 σ 有界贝尔集类的文献不便于使用. 不仅如此，贝尔测度在 σ 有界贝尔集有极好的行为. 我们坚持在非 σ 有界的贝尔集上定义它们造成了下一节中的复杂化，这样的集合上的测度没有被定义过.

习题

1. 令 X 为可分的局部紧度量空间. 证明贝尔集类与博雷尔集类相同.
2. a. 证明引理 1.（见命题 9.15.）
   b. 证明引理 2.
   c. 证明引理 3.
3. a. 证明引理 5.
   b. 证明引理 6.
   c. 证明引理 7(引理 2 有用).
4. a. 令 X 为局部紧豪斯多夫空间，且 F 是与 X 的每个紧子集的交集是闭的集合，那么 F 是闭的. [提示：用逆否证法.]
   b. 证明引理 9.
5. 令 X 为局部紧豪斯多夫空间，且令 $C_0(X)$ 为 $C_c(X)$ 内所有函数的一致极限的空间.
   a. 证明 X 上的连续实值函数 f 属于 $C_0(X)$，当且仅当对于每个 $\alpha>0$，集合 $\{x: |f(x)|\geqslant\alpha\}$ 是紧的.
   b. 令 X^* 为 X 的单点紧致化，那么 $C_0(X)$ 恰好由 $C(X^*)$ 的那些在 ∞ 趋于 0 的函数限制于 X 组成.
   c. 若 B 是 X^* 中的贝尔集，则 $B\cap X$ 是 X 中的贝尔集.
6. 令 X 为具有离散拓扑的不可数集.

335

   a. $C_0(X)$ 和 $C_c(X)$ 是什么？
   b. X 中的贝尔集是什么？
   c. 令 X^* 为 X 的单点紧致化. $C(X^*)$ 是什么？
   d. X^* 的贝尔子集是什么？
   e. 令 ω 为 X^* 的“无穷远点”，那么 $\{\omega\}$ 是不包含非空贝尔集的紧博雷尔集.
   f. 证明存在 X 上的贝尔测度 μ 使得 $\mu(X)=1$ 且对于每个 $C_0(X)$ 中的 f，$f\mathrm{d}\mu=0$.
7. 令 $X=\mathbf{R}^2$ 由形如

$$\{\langle x,y\rangle\in\mathbf{R}^2: a<x<b, y=c\}$$

的集合为基生成的拓扑. 那么 X 是水平直线的直接并集，且 $X=\mathbf{R}\times Y$，其中 Y 是具有离散拓扑的 $\mathbf{R}$. X 的贝尔集是什么？X 的博雷尔集是什么？

8. 令 Y 为具有离散拓扑的不可数集. Z 是 Y 的单点紧致化. $X=Y\times Z$ 的贝尔集是什么? 它的博雷尔集是什么?

9. a. 令 O 为局部紧豪斯多夫空间的开子集，那么 O 是局部紧豪斯多夫空间且 O 的每个贝尔集 E 形如 $O\cap B$，其中 B 是 X 的贝尔子集.

   b. 并非每个 $O\cap B$ 是 O 的贝尔集，其中 B 是 X 的贝尔集.（令 Y 和 Z 为具有离散拓扑的不可数集，Y^* 和 Z^* 是它们的单点紧致化，X 是 Y^* 和 Z^* 的直接并且 O 是 Y 和 Z 的直接并. 令 $B=Z^*$，那么 B 是 X 的紧开集，但 $O\cap B$ 不是 O 的贝尔子集.）

   c. 令 O 为 X 的 σ 紧开子集，那么 O 的贝尔子集正是 X 的那些包含于 O 的贝尔子集.

10. a. 证明本节末尾叙述的类 $\mathcal{R}$，$\mathcal{B}a$，$\mathcal{B}c$，$\mathcal{B}k$，$\mathcal{B}o$ 和 $\mathcal{S}$ 之间的关系是正确的.

   b. 举例说明这里的类都是不同的.

11. 令 X 和 Y 为两个局部紧豪斯多夫空间.

   a. 证明每个 $f\in C_c(X\times Y)$ 是形如

$$\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(x)\psi_i(y)$$

   的和式的极限，其中 $\varphi_i\in C_c(X)$ 且 $\psi_i=C_c(Y)$. [斯通-魏尔斯特拉斯定理是有用的.]

   b. 证明 $\mathcal{B}a(X\times Y)\subset\mathcal{B}a(X)\times\mathcal{B}a(Y)$.

   c. 当且仅当 X 或 Y 是 σ 紧时我们有 $\mathcal{B}a(X\times Y)=\mathcal{B}a(X)\times\mathcal{B}a(Y)$.

336

   d. 令 X 为多于 c 个元素的集合，其中 c 是 $\mathbf{R}$ 的势，且令 X 有离散拓扑. 设 $Z=X\times Y$. 那么 Z 有离散拓扑且它的每个子集是博雷尔集. 证明 $D=\{\langle x, y\rangle\in Z: x=y\}$ 不属于 σ 代数 $\mathcal{B}o(X)\times\mathcal{B}o(X)$. [习题 1.20 是有用的.]

12. a. 对于映射 $f: X\to Y$ 和 Y 的子集簇 $\mathcal{C}$ 我们定义 X 的子集簇 $f^*\mathcal{C}$ 如下:

$$f^*\mathcal{C}=\{E: E=f^{-1}[C]\text{ 对于某个 }C\in\mathcal{C}\}.$$

   证明若 $\mathfrak{A}$ 是由 $\mathcal{C}$ 生成的 σ 代数，那么 $f^*\mathfrak{A}$ 是由 $f^*\mathcal{C}$ 生成的 σ 代数.

   b. 给定映射 $f: X\to Y$ 和 X 的一个子集簇 $\mathcal{C}$，令 $\mathfrak{A}$ 为由 $\mathcal{C}$ 生成的 σ 代数. 若对每个 $C\in\mathcal{C}$，$f^{-1}[f[C]]=C$，那么对于每个 $A\in\mathfrak{A}$，$f^{-1}[f[A]]=A$.

   c. 令 X 为局部紧豪斯多夫空间，K 为 X 的紧贝尔子集，那么存在紧 G_δ 序列 $\langle K_n\rangle$ 使得 K 属于由 $\langle K_n\rangle$ 生成的 σ 代数 $\mathfrak{A}$. [见习题 1.9.]

   d. 令 X，K 和 $\langle K_n\rangle$ 同(c)中的定义. 证明存在 X 到度量空间 I^ω 的连续映射 f 使得对于每个 n 有 $f^{-1}[f[K_n]]=K_n$. [见命题 9.15.]

   e. 证明 X 的紧贝尔子集 K 是一个 G_δ. [注意: $f[K]$ 是度量空间的闭子集.]

   f. 证明 X 的开贝尔子集也是一个 $\mathcal{F}_\sigma$.

13.2　贝尔测度与博雷尔测度的正则性

令 μ 为定义在 X 的子集的 σ 代数 $\mathfrak{M}$ 上的测度且假定 $\mathfrak{M}$ 包含贝尔集. 称集合 $E\in\mathfrak{M}$ 对于 μ **外正则**(或 μ 对于 E 外正则)，若

$$\mu E=\inf\{\mu O: E\subset O, O\text{ 开}, O\in\mathfrak{M}\}$$

称它为**内正则**，若

$$\mu E=\sup\{\mu K: K\subset E, K\text{ 紧}, K\in\mathfrak{M}\}.$$

若集合 E 对 μ 内正则和外正则，则称它为**正则**.

称测度 μ 内正则(外正则，正则)，若它对每个集合 $E\in\mathfrak{M}$ 内正则(外正则，正则). 命

337

题 3.15断言勒贝格测度是一个正则测度.

对于紧空间 X，内正则和外正则完全对称：可测集 E 是外正则当且仅当它的补集内正则. 一个 X 上的有限测度内正则当且仅当它外正则(因此正则). 不难证明，当 X 紧时每个贝尔测度是正则的.

当 X 不再是紧时我们失去这一对称性，这是因为开集的补集不一定紧. 但当 X 是 σ 紧时我们仍然能够建立一些合乎需要的正则性，且它们中的一些可推广到任意局部紧的 X 的 σ 有界集类. 我们从关于有限测度的一个有用观察开始.

10. 命题　*令 μ 为定义在包含局部紧空间 X 的所有贝尔集的 σ 代数 $\mathfrak{M}$ 上的有限测度. 若 μ 内正则，则它是正则的.*

证明　令 $E\in\mathfrak{M}$. 那么

$$\mu\widetilde{E}=\sup\{\mu K: K\subset\widetilde{E}, K\in\mathfrak{M}, \text{且 } K\text{ 紧}\}.$$

但对于这样的 K 我们有 $\widetilde{K}$ 开和 $E\subset\widetilde{K}$. 因此

$$\begin{aligned}\mu E=\mu X-\mu\widetilde{E}&=\inf\{\mu X-\mu K\}\\&=\inf\mu\widetilde{K}\\&\geqslant\inf\{\mu O: E\subset O\}.\end{aligned}$$

因此 $\mu E=\inf\{\mu O: E\subset O, O\text{ 开且 } O\in\mathfrak{M}\}$. ■

11. 定理　*令 μ 为局部紧空间 X 上的贝尔测度且 E 是 X 的 σ 有界贝尔集，那么对于 $\varepsilon>0$：*

i. 存在一个 σ 紧开集 O 满足 $E\subset O$ 且 $\mu(O\sim E)<\varepsilon$.

ii. $\mu E=\sup\{\mu K: K\subset E, K\text{ 是一个紧 } G_\delta\}$.

证明　对于每个 $\varepsilon>0$，令 $\mathcal{R}$ 为满足(i)和(ii)的集合 E 的类. 假定 $E=\bigcup E_n$，其中 $E_n\in\mathcal{R}$，那么对于每个 n 存在 σ 紧开集 O_n 满足 $E_n\subset O_n$ 且 $\mu(O_n\sim E_n)<2^{-n}\varepsilon$. 于是 $O=\bigcup O_n$ 仍然是一个 σ 紧开集且满足

338

$$\mu(O\sim E)\subset\bigcup(O_n\sim E_n),$$

因而

$$\mu(O\sim E)\leqslant\sum\mu(O_n\sim E_n)<\varepsilon.$$

因此 E 满足(i).

若对某个 n 我们有 $\mu E_n=\infty$，那么存在包含于 $E_n\subset E$ 的任意大的有限测度的紧 G_δ，因此(ii)对于 E 成立. 若 $\mu E_n<\infty$ 对于每个 n 成立，则存在 $K_n\subset E_n$，K_n 是紧 G_δ 且

$$\mu(E_n\sim K_n)<2^{-n}\varepsilon.$$

则

$$\begin{aligned}\mu E&=\sup_N\mu\Big(\bigcup_{n=1}^N E_n\Big)\\&\leqslant\sup_N\mu\Big(\bigcup_{n=1}^N K_n\Big)+\varepsilon.\end{aligned}$$

因此 E 满足(ii).

若 E 是一个紧 G_δ，则存在具有紧支撑的连续实值函数 φ 满足 $0\leqslant\varphi\leqslant 1$ 且 $E=\{x: \varphi(x)=1\}$. 令 $O_n=\{x: \varphi(x)>1-1/n\}$. 那么 O_n 是一个 σ 紧开集且 $\bar{O}_n$ 紧. 由于 $\mu O_1<\infty$，根据命题 11.2我们有 $\mu E=\inf\mu O_n$. 因此每个紧 G_δ 满足(i)，且它平凡地满足(ii).

令 X 为紧，那么 E 满足(i)当且仅当 $\widetilde{E}$ 满足(ii)，因而满足(i)和(ii)的集簇 $\mathcal{R}$ 是包含紧 G_δ 的 σ 代数. 因此 $\mathcal{R}$ 包含所有贝尔集，且当 X 紧时命题成立.

对任意局部紧空间 X 和有界贝尔集 E，我们能够取 H 为紧 G_δ 且 U 为 X 的 σ 紧开子集使得

$$\bar{E}\subset U\subset H$$

那么根据命题 8，E 是 H 的贝尔子集，因而

$$\mu(W\sim E)<\varepsilon.$$

由于 W 和 U 为 σ 紧，所以 $O=W\cap U$ 也是 σ 紧. 因而 O 是 σ 紧开集且满足

$$E\subset O\subset W.$$

339

因此

$$O\sim E\subset W\sim E,$$

且

$$\mu(O\sim E)<\varepsilon.$$

因而 E 满足(i). 因此，所有有界贝尔集属于 $\mathcal{R}$.

由于 $\mathcal{R}$ 在可数并下封闭，且每个 σ 有界贝尔集是有界贝尔集的可数并集，所以可以得出每个 σ 有界贝尔集属于 $\mathcal{R}$. ■

若已经定义贝尔集类为包含紧 G_δ 的最小 σ 环且取贝尔测度为定义在这个 σ 环，那么该定理有优美的形式："每个贝尔测度是正则的". 若 X 是 σ 紧，则由紧 G_δ 生成的 σ 环和 σ 代数是相同的. 因此我们有下面的系：

12. 系　*若 X 是 σ 紧，则 X 上的每个贝尔测度是正则的.*

初看起来甚至在 σ 紧空间的情形中系 12 比定理 11 弱，这是由于贝尔测度的内正则仅意味着贝尔集 E 的测度是包含于 E 的紧贝尔集的测度的上确界，而定理说的是它是包含于 E 的紧 G_δ 集的测度的上确界. 然而，这个较弱仅是表面的，因为我们能够证明每个紧贝尔集事实上是一个 G_δ. 这个结果有些复杂，我们这里不用它；读者可参见习题 12 的证明.

若 X 非紧，则对偶于测度的内正则的适当概念是拟正则：若一个定义在 σ 代数 $\mathfrak{M}$ 上的包含贝尔集的测度 μ 外正则且每个开集 $O\in\mathfrak{M}$ 对于 μ 内正则，我们说它为**拟正则**.

非 σ 紧空间上的贝尔测度不必正则(习题 13 和 21)，但可以在不改变它在 σ 有界贝尔集的值的情况下要求它为内正则或拟正则. 我们在下列命题中概括这一内容，其证明留给读者(习题 15).

340

13. 命题　*令 μ 为 X 上的贝尔测度，那么存在 X 上的惟一拟正则贝尔测度 $\bar{\mu}$ 和惟一内正则测度 $\underline{\mu}$ 使得对于每个 σ 有界贝尔集 E 有 $\mu E=\bar{\mu}E=\underline{\mu}E$.*

从命题 10 可以看到若 $\underline{\mu}$ 有限则 $\underline{\mu}$ 正则. 在这种情形中 $\bar{\mu}=\underline{\mu}$. 若存在一个与在 σ 有界贝尔

集上的μ一致的正则贝尔测度，则根据后一测度的惟一性它必须等于$\bar{\mu}$和$\underline{\mu}$．遗憾的是，我们有一个σ有限贝尔测度，在其上$\bar{\mu}$和$\underline{\mu}$是不同的(习题 21)．

以下三个命题研究博雷尔测度的正则性和惟一性．第一个命题的证明留给读者．

14. 命题　令μ为定义在包含博雷尔集的σ代数$\mathfrak{M}$上的测度．若对于每个紧集μ外正则或对于每个有界开集μ内正则，则对于每个$\mathfrak{M}$内的σ有界集μ正则．

15. 命题　令μ为定义在包含贝尔集的σ代数$\mathfrak{M}$上的测度．假设μ拟正则或μ内正则，那么对于每个满足$\mu E<\infty$的$E\in\mathfrak{M}$存在一个贝尔集B满足

$$\mu(E\Delta B)=0.$$

证明　我们仅处理拟正则情形而将内正则的情形留给读者(习题 19)．

令E为有限测度的可测集．由于μ是外正则的，我们可以找到开集序列$\langle O_n\rangle$满足

$$O_n\supset O_{n+1}\supset E$$

且

$$\mu O_n<\mu E+2^{-n}.$$

由于μ拟正则，存在紧集$K_m\subset O_m$满足

341

$$\mu K_m>\mu O_m-2^{-m},$$

且根据引理 1 我们可以取K_m为G_δ．现在

$$\begin{aligned}\mu K_m&>\mu O_m-2^{-m}\geqslant\mu E-2^{-m}\\&>\mu O_n-2^{-n}-2^{-m}.\end{aligned}$$

设

$$H_m=\bigcup_{j=m}^{\infty}K_j.$$

那么H_m是贝尔集，且对于$m\geqslant n$，$H_m\subset O_m\subset O_n$．并且$H_m\supset H_{m+1}$，且

$$\mu H_m\geqslant\mu K_m>\mu O_n-2^{-n}-2^{-m}.$$

令$B=\bigcap H_m$，那么B是贝尔集，$B\subset O_n$，且$\mu B=\lim\mu H_m$．因此

$$\mu B\geqslant\mu O_n-2^{-n}.$$

由于$B\subset O_n$且$E\subset O_n$，我们有

$$B\Delta E\subset(O_n\sim B)\cup(O_n\sim E)$$

因而

$$\begin{aligned}\mu(B\Delta E)&\leqslant\mu(O_n\sim B)+\mu(O_n\sim E)\\&<2^{-n}+2^{-n}=2^{-n+1}.\end{aligned}$$

这对任意n成立，因而

$$\mu(B\Delta E)=0.$$

■

16. 命题　令μ_1和μ_2为定义在包含博雷尔集的σ代数$\mathfrak{M}_1$和$\mathfrak{M}_2$上的完备饱和测度．假定μ_1和μ_2拟正则或内正则．若只要K是一个紧G_δ，$\mu_1K=\mu_2K$，则$\mathfrak{M}_1=\mathfrak{M}_2$且对于$\mathfrak{M}_i$的每个集合有$\mu_1=\mu_2$．

证明　我们仅处理拟正则情形而将内正则的情形留给读者(习题 20)．

我们从证明在 σ 代数 $\mathfrak{M}=\mathfrak{M}_1\cap\mathfrak{M}_2$ 上 $\mu_1=\mu_2$ 开始. 由于每个 μ_i 在开集上内正则且它们在紧 G_δ 集上一致，对于每个开 $O\in\mathfrak{M}$ 我们必须有 $\mu_1 O=\mu_2 O$. 但外正则蕴涵着对于每个 $E\in\mathfrak{M}$ 有 $\mu_1 E=\mu_2 E$.

每个测度 μ_i 为零的集合包含于测度为零的博雷尔集，在博雷尔集上 $\mu_1=\mu_2$. 因此 μ_1 和 μ_2 有相同的零测度集，这是因为它们是完备的.　342

根据命题 14，$\mathfrak{M}_1$ 中满足 μ_1 有限的集类与 $\mathfrak{M}_2$ 中满足 μ_2 有限的集类相同. 因此关于 $\langle\mu_1,\mathfrak{M}_1\rangle$ 局部可测的集类与关于 $\langle\mu_2,\mathfrak{M}_2\rangle$ 局部可测的集类相同. 由于 μ_1 和 μ_2 是饱和的，因而那些类分别与 $\mathfrak{M}_1$ 和 $\mathfrak{M}_2$ 重合. ■

命题 15 的内容不像它最初看起来那样令人惊讶. 在下一节中我们将看到总是可能将一个贝尔测度延拓到内正则博雷尔测度和拟正则博雷尔测度且在 σ 有界贝尔集上与原测度一致. 到内正则测度的延拓有一个将尽可能多的集合赋予零测度的倾向，因此存在许多测度为零的集合且这使得 $E\Delta B$ 容易有零测度. 到拟正则的延拓仍然将那些集合赋予零测度且它必须为外正则但有赋予最大多数含义模糊的情形无限测度的倾向. 这些无限测度的集合被从命题 15 的结论中排除出去.

习题 7 的例子是特征鲜明的，这里我们取 X 为具有在每条水平直线上给出通常的拓扑且使 X 为水平直线的直接并的拓扑的 $\mathbf{R}^2$. 一个集合 E 是 σ 有界贝尔集当且仅当它仅与可数个水平直线相交. σ 有界集的补集与除可数条水平直线外的所有水平直线相交. 设

$$\mu E=\sum_y m(E\cap(R\times\{y\})),$$

其中 m 是勒贝格测度. 那么 μ 是一个正则贝尔测度.

X 内的集合 E 是一个博雷尔集当且仅当它与 $\mathbf{R}$ 的博雷尔集内的每条水平直线相交. μ 的内正则延拓是测度

$$\underline{\mu}E=\sum_y m(E\cap(R\times\{y\})).$$

μ 的拟正则延拓是在 σ 有界贝尔集上(在这个例子中与 σ 有界博雷尔集相同)等于测度 μ 且在每个非 σ 有界的博雷尔集上无限的测度 $\bar{\mu}$.

因此 $\bar{\mu}$ 与 $\underline{\mu}$ 不同的临界集类是那些与勒贝格测度等于零的但与不可数条的水平直线有非空交的集合内的每条水平直线相交的集合. 对于这样的集合我们有 $\underline{\mu}E=0$ 且 $\bar{\mu}E=\infty$.　343

在结束本节之前，我们指出存在紧空间上的非正则的博雷尔测度. 构造出这么一个例子有点复杂，我们不做这件事. 有兴趣的读者可从 Halmos[5] 习题 10，第 231 页找到如何构造的建议.

习题

13. 令 X 为具有离散拓扑的不可数集且令 $X_0=\{x_k\}$ 是 X 的一个可数子集. 设

$$\mu_0 E=\sum_{x_n\in E}2^{-n}.$$

a. 证明 μ_0 是一个对 X 的所有子集有定义的有限正则测度.

b. 若 E 为 σ 有界定义 $\mu E=\mu_0 E$，若 $\sim E$ 为 σ 有界定义 $\mu E=3$，则 μ 是非内正则的有限外正

则贝尔测度.

14. a. 证明两个 σ 紧集的交集是 σ 紧.

b. 给出紧空间 X 的非 σ 紧的开子集 O 的例子.

15. 证明命题 13.（见习题 11.9.）

16. 令 X 为习题 7 中的空间且 μ，$\bar{\mu}$ 和 $\underline{\mu}$ 是书中定义的其上的测度.

a. 证明 μ 是一个正则贝尔测度.

b. 证明 $\underline{\mu}$ 是一个内正则博雷尔测度.

c. 证明 $\bar{\mu}$ 是一个拟正则博雷尔测度.

d. 不存在 X 上的在 σ 有界贝尔集上与 μ 一致的正则博雷尔测度.

17. 令 μ 为定义在包含贝尔集的 σ 代数 $\mathfrak{M}$ 上的内正则测度.

a. 每个紧 $K\in\mathfrak{M}$ 对于 μ 是外正则(因此正则).（令 O 为包含 K 的有界开集. 用 $O\sim K$ 的内正则性.）

b. 对于每个开集 $O\in\mathfrak{M}$ 我们有

344

$$\mu O=\sup\{\mu K: K\subset O, K \text{ 是一个紧 } G_\delta\}.$$

18. 证明命题 14.（见习题 17a.）

19. a. 当 μ 是内正则的情形证明命题 15.

b. 证明命题 15 的结论对 σ 有限测度可测的集合 E 成立.

20. 对 μ 为内正则的情形证明命题 16.

21. 令 $X_0=\mathbf{R}\times\{0\}$，且 $X=X_0\cup D$，其中

$$D=\{\langle x,y\rangle\in\mathbf{R}^2: x=q2^{-n}, y=2^{-n}, n\in\mathbf{N}, q\in\mathbf{Z}\}.$$

通过取 D 的任何子集和形如

$$N_{x_0n_0}=\{\langle x,y\rangle\in X: |x-x_0|<y \text{ 且 } y\leqslant 2^{-n_0}\}$$

的任何集合作为我们的邻域基定义 X 的拓扑.

a. 证明集合 $N_{x_0n_0}$ 在 X 的拓扑是紧的且 X 是局部紧豪斯多夫空间.

b. 每个包含于 X_0 的紧集有限.

c. 定义 $\mu\{\langle q2^{-n}, 2^{-n}\rangle\}=2^{-n}$，且对任意子集 $E\subset X$ 定义

$$\mu E=\sum_{z\in E\cap D}\mu\{z\},$$

证明 μ 是定义在 X 的所有子集的可数加性测度.

d. 证明 $\mu N_{x_0n_0}<\infty$.

e. 证明 μ 是 σ 有限内正则博雷尔测度.

f. 对于点 $\langle x, y\rangle\in D$ 和点 $\langle x_0, 0\rangle\in X_0$，若 $|x-x_0|<y$ 我们说点 $\langle x, y\rangle$ 覆盖点 $\langle x_0, 0\rangle$. 可被点 $\langle x, y\rangle\in D$ 覆盖的集合 $G\subset X_0$ 的勒贝格测度至多为 $\mu\{\langle x, y\rangle\}$.

g. 对于 $E\subset D$ 和 $G\subset X_0$，若 G 的每个点被 E 的一个点覆盖我们说 E 覆盖 G，则 G 的勒贝格测度满足

$$mG\leqslant\mu E.$$

h. 集合 X_0 对于 μ 不是外正则. [我们有 $\mu X_0=0$. 若 O 是满足 $O\supset X_0$ 的开集，则 $O\cap D$ 覆盖 X_0.]

i. 在 X 上不存在与所有紧集上的 μ 一致的正则贝尔测度.

j. 对于这个例子 $\bar{\mu}$ 是什么?

13.3 博雷尔测度的构造

到目前为止，我们遇到的非平凡的博雷尔测度仅有勒贝格测度和第 12 章的测度. 本节我们推广构造它们的程序以给出构造博雷尔测度的一般方法. 第一种方法是从适当的外测度开始取关于外测度的可测集合. 为了使所有的博雷尔集可测，外测度必须具有某种性质. 以下定义给出了一些方便的性质: 345

定义 对于局部紧豪斯多夫空间的外测度 μ^*，若

i. 对于每个 $E\subset X$，$\mu^* E=\inf\{\mu^* O: O \text{ 开}, E\subset O\}$.

ii. 若 O_1 和 O_2 是不相交开集，则 $\mu^*(O_1\cup O_2)=\mu^* O_1+\mu^* O_2$.

iii. 对于 O 为开集，$\mu^*(O)=\sup\{\mu^* K: K\subset O, K \text{ 紧}\}$.

我们称它为(拓扑)正则.

我们必须区分拓扑意义下的正则性概念和第 12 章引入的纯粹测度一理论意义下的正则性概念. 可以看到(定理 19)若 μ^* 拓扑正则，则所有博雷尔集 μ^* 可测. 因此开集是可测的，且因此每个满足 $\mu^* E<\infty$ 的集合 E 具有一个可测覆盖的 G_δ. 因此，μ^* 在测度意义下也正则.

我们从以下两个引理开始，其证明留给读者.

17. 引理 若 μ^* 是 X 上的外测度，则以下每个陈述等价于 μ^* 正则性定义中的(iii):

iii′. 对于 O 为开集，$\mu^* O=\sup\{\mu^* K: K\subset O, K \text{ 为紧 } G_\delta\}$.

iii″. 对于 O 为开集，$\mu^* O=\sup\{\mu^* U: \bar{U}\subset O, \bar{U} \text{ 紧}, U \text{ 开}\}$.

18. 引理 任意集合 $E\subset X$ 是 μ^* 可测当且仅当

$$\mu^* O\geqslant \mu^*(O\cap E)+\mu^*(O\cap \tilde{E})$$

对于每个满足 $\mu^* O<\infty$ 的开集 O 成立.

19. 定理 令 μ^* 为 X 上的拓扑正则外测度，那么每个博雷尔集是 μ^* 可测.

证明 由于 μ^* 可测集构成一个 σ 代数，仅需证明每个闭集 F 为 μ^* 可测. 346

令 O 为任意开集满足 $\mu^* O<\infty$ 且 ε 是任意正数. 那么 $O\cap\tilde{F}$ 是有限外测度的开集. 根据引理 17 的性质(iii″)存在开集 U 满足 $\bar{U}\subset O\cap\tilde{F}$ 且 $\mu^* U>\mu^*(O\cap\tilde{F})-\varepsilon$.

设 $V=O\sim\bar{U}$. 那么 $V\cap U=\varnothing$ 且 $O\cap F\subset V$. 因此根据(ii)

$$\begin{aligned}\mu^*(O\cap F)+\mu^*(O\cap \tilde{F}) &< \mu^* V+\mu^* U+\varepsilon\\ &< \mu^*(U\cup V)+\varepsilon\\ &< \mu^* O+\varepsilon,\end{aligned}$$

由于 ε 是任意的，

$$\mu^*(O\cap F)+\mu^*(O\cap\tilde{F})\leqslant\mu^* O,$$

因而 F 是 μ^* 可测的. ■

我们经常希望通过将开集上的某个适当扩充的实值函数延拓以定义正则外测度．以下命题给出了在何种条件下我们可得到一个正则外测度．

20. 命题　令$\bar{\mu}$为定义在X的开子集类的非负扩充的实值函数且满足

i. $\bar{\mu}O<\infty$，若$\bar{O}$紧．

ii. $\bar{\mu}O_1\leqslant\bar{\mu}O_2$，若$O_1\subset O_2$，

iii. $\bar{\mu}(O_1\cup O_2)=\bar{\mu}O_1+\bar{\mu}O_2$ 若$O_1\cap O_2=\varnothing$，

iv. $\bar{\mu}(\bigcup O_i)\leqslant\sum\bar{\mu}O_i$，

v. $\bar{\mu}(O)=\sup\{\bar{\mu}U: \bar{U}\subset O,\ \bar{U}$ 紧$\}$．

那么如下定义的集函数μ^*

$$\mu^* E = \inf\{\bar{\mu}O : E\subset O\}$$

是一个拓扑正则外测度．

证明　μ^*的单调性与可数次加性可直接从(ii)和(iv)与μ^*的定义得到．对于O开也有$\mu^* O=\bar{\mu}O$，因而引理17的条件(iii″)由(v)得到．正则性定义的条件(ii)由命题的假设(iii)得到且条件(i)由μ^*的定义得到．由于对于$\bar{O}$紧有$\bar{\mu}O<\infty$，因而对于每个有界集E我们有$\mu^* E<\infty$．■

[347] 定义在开集的且满足先前命题的条件的集函数$\bar{\mu}$有时称为内容量．该命题断言这样一个集函数总是可以延拓成一个博雷尔测度．一个对偶的程序是从定义在紧集或紧G_δ的适当的集函数开始的．由此我们给出以下定义．

定义　令$\mathcal{K}$为包含紧G_δ的紧集族且具有性质：只要$K_1\in\mathcal{K}$且$K_2\in\mathcal{K}$就有$K_1\cup K_2\in\mathcal{K}$且$K_1\cap K_2\in\mathcal{K}$．对于一个定义在$\mathcal{K}$上的非负实值函数$\lambda$，若

i. 当$K_1\subset K_2$时，$\lambda K_1\leqslant\lambda K_2$．

ii. 当$K_1\cap K_2=\varnothing$时，$\lambda(K_1\cup K_2)=\lambda K_1+\lambda K_2$．

则我们称它为一个容量．

若

iii. $\lambda K=\inf\{\lambda H: K\subset H^\circ,\ H\in\mathcal{K}\}$．

则我们称它为正则容量．

21. 命题　令λ为紧集类$\mathcal{K}$的容量，那么惟一存在拟正则博雷尔测度$\bar{\mu}$使得对于每个开集O我们有

$$\bar{\mu}O = \sup\{\lambda K : K\subset O, K\in\mathcal{K}\}$$

此外，对于$K\in\mathcal{K}$有

$$\bar{\mu}K^\circ\leqslant\lambda K\leqslant\bar{\mu}K$$

若λ是一个正则容量，则对于所有$K\in\mathcal{K}$，有$\bar{\mu}K=\lambda K$．

证明　对于每个开集O令

$$\bar{\mu}O = \sup\{\lambda K : K\subset O, K\in\mathcal{K}\}.$$

那么命题20的性质(i)，(ii)，(iii)和(v)由$\bar{\mu}$的定义和λ的定义直接得到．为看到(iv)也成立，令

$$O=\bigcup_{i=1}^{\infty}O_i,$$

取紧集 $K\in\mathcal{K}$ 满足 $K\subset O$. 根据命题 9.16 存在具有紧支撑的非负连续实值函数 φ_1，…，φ_n 使得

348

$$\sum_{i=1}^{n}\varphi_i\equiv 1\ 在\ K\ 上,$$

且 $\operatorname{supp}\varphi_1\subset O_i$. 令 $G_i=\{x:\ \varphi_i(x)\geqslant 1/n\}$，那么每个 G_i 是紧 G_δ 且因此属于 $\mathcal{K}$. 因此，每个 $G_i\cap K$ 属于 $\mathcal{K}$. 我们也有

$$K=\bigcup_{i=1}^{n}G_i\cap K$$

并且 $G_i\cap K\subset O_i$. 因此

$$\begin{aligned}\lambda K&\leqslant\sum_{i=1}^{n}\lambda(G_i\cap K)\\&\leqslant\sum_{i=1}^{n}\bar{\mu}O_i\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}\bar{\mu}O_i.\end{aligned}$$

对所有这样的 K 取上确界给出(iv).

根据命题 20 和定理 19，集函数 $\bar{\mu}$ 延拓为拟正则博雷尔测度 $\bar{\mu}$. 由于 $\bar{\mu}$ 是外正则，我们有

$$\begin{aligned}\bar{\mu}K&=\inf\{\bar{\mu}O,O\ 开,K\subset O\}\\&\geqslant\lambda K.\end{aligned}$$

也有

$$\begin{aligned}\bar{\mu}K^\circ&=\sup\{\lambda H:H\in\mathcal{K},H\subset K^\circ\}\\&\leqslant\lambda K.\end{aligned}$$

因此

$$\bar{\mu}K^\circ\leqslant\lambda K\leqslant\bar{\mu}K.$$

若 λ 正则，

$$\begin{aligned}\bar{\mu}K&=\inf\{\bar{\mu}O,K\subset O,O\ 开\}\\&\leqslant\inf\{\bar{\mu}H^\circ:K\subset H^\circ,H\in\mathcal{K}\}\\&\leqslant\inf\{\lambda H:K\subset H^\circ,H\in\mathcal{K}\}\\&=\lambda K.\end{aligned}$$

因此对于所有 $K\in\mathcal{K}$，$\bar{\mu}K=\lambda K$. ■

22. 定理　令 μ 为 X 上的贝尔测度，那么存在定义在包含博雷尔集的 σ 代数的完备饱和测度 $\bar{\mu}$ 满足 $\bar{\mu}$ 拟正则和 $\underline{\mu}$ 内正则，且对于每个 σ 有界贝尔集，

$$\bar{\mu}E=\underline{\mu}E=\mu E$$

349

测度 $\bar{\mu}$ 和 $\underline{\mu}$ 是惟一的.

证明　令 $\mathcal{K}$ 为紧 G_δ 类. 那么 μ 对 $\mathcal{K}$ 的限制是一个正则内容，根据命题 21 它可延拓为拟正则博雷尔测度 $\bar{\mu}$. 由于对于开集 $\bar{\mu}$ 为内正则且 μ 对于 σ 有界贝尔集为内正则，它们在 σ 有界开

贝尔集等同．由于它们在 σ 有界贝尔集都是外正则，因此对于每个 σ 有界贝尔集 E，我们有 $\bar{\mu}E=\mu E$．由于 $\bar{\mu}$ 来自正则外测度，因此它完备且饱和．

令 $\mathfrak{M}$ 为关于 μ^* 的 μ^* 可测集组成的类．定义 $\mathfrak{M}$ 上的 $\underline{\mu}$ 为

$$\underline{\mu}E=\sup\{\bar{\mu}B:B\subset E,B\in\mathfrak{M},B\sigma\text{ 有界}\}.$$

根据命题 14 由于 $\bar{\mu}$ 在 σ 有界集正则，因此对于所有 $\mathfrak{M}$ 内的 σ 有界集我们有 $\underline{\mu}E=\bar{\mu}E$ 且对于所有 σ 有界贝尔集 E 有 $\underline{\mu}E=\bar{\mu}E=\mu E$．

为证明 $\underline{\mu}$ 是可数加性的，令 $\langle E_j\rangle$ 为 $\mathfrak{M}$ 内的满足 $E=\bigcup E_j$ 的不相交集合序列．那么对于任何 $\mathfrak{M}$ 内的满足 $B\subset E$ 的 σ 有界集合 B，我们有 $B_j=B\cap E_j$ 是 $\mathfrak{M}$ 内的 σ 有界集合且 $B_j\subset E_j$．因此

$$\bar{\mu}B=\sum\bar{\mu}B_j\leqslant\sum\underline{\mu}E_j.$$

因此

$$\underline{\mu}E\leqslant\sum\underline{\mu}E_j,$$

$\underline{\mu}$ 是可数次加性的．若对于某个 j，$\underline{\mu}E_j=\infty$，$\underline{\mu}E=\infty$，因而 $\underline{\mu}E=\sum\underline{\mu}E_j$．若每个 $\underline{\mu}E_j$ 有限，则给定 $\varepsilon>0$，存在一个 σ 有界集 $B_j\in\mathfrak{M}$，$B_j\subset E_j$，使得

$$\underline{\mu}E_j<\bar{\mu}B_j+2^{-j}\varepsilon.$$

那么 $B=\bigcup B_j\subset E$，且 B 是 σ 有界集．也有

$$\underline{\mu}E\geqslant\bar{\mu}B=\sum\bar{\mu}B_j\geqslant\sum\underline{\mu}E_j-\varepsilon.$$

由于 ε 是任意的，因此 $\underline{\mu}E\geqslant\sum\underline{\mu}E_j$，$\underline{\mu}$ 为可数加性的．

由于 $\bar{\mu}$ 在 $\mathfrak{M}$ 的 σ 有界集上内正则，因此 $\underline{\mu}$ 在 $\mathfrak{M}$ 上内正则．

350　$\bar{\mu}$ 和 $\underline{\mu}$ 的惟一性由命题 16 得到．■

习题

22. 令 μ 和 v 为 X 和 Y 上的博雷尔测度且它们中的一个或者内正则或者拟正则．

 a. $X\times Y$ 的每个 σ 有界博雷尔集属于 $\mathcal{B}o(X)\times\mathcal{B}o(Y)$，且若 E 为 σ 有界，

$$\overline{(\mu\times v)}E=(\bar{\mu}\times\bar{v})E=(\underline{\mu}\times\underline{v})E=(\mu\times v)E=(\underline{\mu\times v})E.$$

 b. 证明 $\bar{\mu}\times\bar{v}\geqslant\overline{\mu\times v}$．

 c. 证明 $\underline{\mu}\times\underline{v}\geqslant\underline{\mu\times v}$．

23. 令 μ 为 $X=[0,1]$ 上的勒贝格测度，v 为 $Y=[0,1]$ 上的具有离散拓扑的计数测度，那么 $\mu=\bar{\mu}=\underline{\mu}$ 且 $v=\bar{v}=\underline{v}$．

 a. 证明

$$(\mu\times v)E=(\overline{\mu\times v})E=\begin{cases}\infty & \text{若 } E \text{ 不是 } \sigma \text{ 有界}\\ \sum_{\alpha}m(E\cap[X\times\{\alpha\}]) & \text{若 } E \text{ 是 } \sigma \text{ 有界.}\end{cases}$$

 b. 证明

$$(\underline{\mu\times v})E = \sum_{\alpha} m(E\cap[X\times\{\alpha\}]).$$

c. 令 $D=\{\langle x, y\rangle\in X\times Y: x=y\}$，那么 D 是闭的因而是 $X\times Y$ 的博雷尔子集.

d. (c)的集合 D 属于 $\mathcal{B}o(X)\times\mathcal{B}o(Y)$.

e. 令 $f(x, y)=\chi_D$，那么 f 为博雷尔可测，且

$$\int\left(\int f\mathrm{d}\mu\right)\mathrm{d}v = 0,$$

$$\int\left(\int f\mathrm{d}v\right)\mathrm{d}\mu = 1.$$

f. $\int f\mathrm{d}(\mu\times v)$ 和 $\int f\mathrm{d}\,(\underline{\mu\times v})$ 是什么?

24. 令 μ 为局部紧空间 X 的贝尔测度，U 为所有满足 $\mu O=0$ 的开贝尔集 O 的并集. U 的补集 $F=\tilde{U}$ 是一个闭集，称为 μ 的**支撑**(或承载形).

a. 若 O 是满足 $O\cap F\neq\varnothing$ 的开贝尔集，则 $\mu O>0$.

b. 若 K 是紧贝尔集且 $K\cap F=\varnothing$，则 $\mu K=0$.（K 的每一点包含于测度等零的开集. 因此根据 K 的紧性它包含于测度等零的开集.）

c. 若 E 是满足 $E\cap F=\varnothing$ 的 σ 有界贝尔集，则 $\mu E=0$. [351]

d. 若 $f\in C_c(X)$ 且 $f\geqslant 0$，则 $\int f\mathrm{d}\mu=0$ 当且仅当在 F 上 $f\equiv 0$. [提示：集合 $\{x: f(x)>0\}$ 是一个 σ 有界贝尔集.]

e. 给出一个例子说明 F 不必是一个贝尔集.

f. 根据(c)若 X 紧(或 σ 紧)，那么对于每个满足 $E\cap F=\varnothing$ 的贝尔集 E，$\mu E=0$. 构造一个例子说明若 X 不是 σ 紧，这个命题不一定正确(见习题 5e).

13.4 正线性泛函与博雷尔测度

令 X 为局部紧豪斯多夫空间. 如同通常的做法，我们用 $C_c(X)$ 表示具有紧支撑的连续实值函数空间. 对 $C_c(X)$ 上的一个实值线性泛函 I，若只要 $f\geqslant 0$ 就有 $I(f)\geqslant 0$，则我们称它为正的. 本节的目标是证明每个 $C_c(X)$ 上的正线性泛函可表示为适当博雷尔(或贝尔)测度的积分. 特别地我们有以下定理：

23. 定理(里斯-马尔可夫) 令 X 为局部紧豪斯多夫空间且 I 是 $C_c(X)$ 上的正线性泛函. 那么存在 X 上的一个博雷尔测度 μ 使得

$$I(f)=\int f\mathrm{d}\mu$$

对于每个 $f\in C_c(X)$ 成立. 测度 μ 可取为拟正则或内正则. 在这些情形中它是惟一的.

证明 对于每个开集 O 定义 $\bar{\mu}O$ 为

$$\bar{\mu}O=\sup\{I(f): f\in C_c(X), 0\leqslant f\leqslant 1, \mathrm{supp}f\subset O\}.$$

那么 $\bar{\mu}$ 是定义在所有开集上的扩充的实值函数且容易看到它是单调的、在有界集上有限且满足命题 20 的正则性(5). 为证明 $\bar{\mu}$ 在开集上是可数次加性的，令 $O=\bigcup O_i$ 且令 f 为 $C_c(X)$ 中的任意函

数满足 $0\leqslant f\leqslant 1$ 且 $\operatorname{supp}f\subset O$. 根据命题 9.16 存在 $C_c(X)$中的非负函数 φ_1，…，φ_n 满足 $\operatorname{supp}\varphi_i\subset O_i$，且使得在 $\operatorname{supp}f$ 上

$$\sum_{i=1}^{n}\varphi_i\equiv 1$$

352

那么 $f=\sum\varphi_i f$，$0\leqslant\varphi_i f\leqslant 1$ 且 $\operatorname{supp}(\varphi_i f)\subset O_i$. 因此

$$\begin{aligned}If=\sum_{i=1}^{n}I(\varphi_i f)&\leqslant\sum_{i=1}^{n}\bar{\mu}O_i\\&\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}\bar{\mu}O_i.\end{aligned}$$

对所有这样的 f 取上确界给出

$$\bar{\mu}O\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}\bar{\mu}O_i,$$

且 $\bar{\mu}$ 是可数次加性的.

若 $O=O_1\cup O_2$满足 $O_1\cap O_2=\varnothing$且 $f_i\in C_c(X)$，$0\leqslant f_i\leqslant 1$，以及 $\operatorname{supp}f_i\subset O_i$，则函数 $f=f_1+f_2$ 有 $\operatorname{supp}f\subset O$ 且 $0\leqslant f\leqslant 1$. 因此

$$If_1+If_2\leqslant\bar{\mu}O.$$

由于在 $0\leqslant f_i\leqslant 1$ 且 $\operatorname{supp}f_i\subset O_i$的条件下，$f_1$和 f_2 可任意选取，因而有

$$\bar{\mu}O_1+\bar{\mu}O_2\leqslant\bar{\mu}O,$$

这就得到

$$\bar{\mu}O_1+\bar{\mu}O_2=\bar{\mu}O.$$

因此 $\bar{\mu}$ 满足命题 20 的假设，因而 $\bar{\mu}$ 扩充为拟正则博雷尔测度.

接着证明对于每个 $f\in C_c(X)$,$If=\int f\mathrm{d}\mu$. 由于 f 是$C_c(X)$内的两个非负函数的差,所以仅需考虑 $f\geqslant 0$. 根据线性性也可以取 $f\leqslant 1$.

选取一个有界开集 O 满足 $\operatorname{supp}f\subset O$. 设

$$O_k=\{x:nf(x)>k-1\}$$

且 $O_0=O$. 那么 $O_{n+1}=\varnothing$，且 $\bar{O}_{k+1}\subset O_k$. 定义

$$\varphi_k=\begin{cases}1 & \text{在 } O_{k+1}\text{ 中}\\ nf(x)-k+1 & \text{在 } O_k\sim O_{k+1}\text{ 中}\\ 0 & \text{在 } \tilde{O}_k\text{ 中.}\end{cases}$$

那么

$$f=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\varphi_k.$$

353

我们也有 $\operatorname{supp}\varphi_k\subset\bar{O}_k\subset O_{k-1}$且在 O_{k+1}上 $\varphi_k\equiv 1$. 因此

$$\bar{\mu}O_{k+1}\leqslant I\varphi_k\leqslant\bar{\mu}O_{k-1}$$

对 $k\geqslant 1$ 成立. 也有

$$\bar{\mu}O_{k+1}\leqslant\int\varphi_k\mathrm{d}\bar{\mu}\leqslant\bar{\mu}O_k$$

对 $k \geqslant 1$ 成立．因此

$$-\mu O_1 \leqslant \sum_{k=1}^{n}\left(I\varphi_k - \int \varphi_k\right) \leqslant \bar{\mu} O_0 + \bar{\mu} O_1.$$

相应地，

$$\left| If - \int f \mathrm{d}\mu \right| \leqslant \frac{2}{n} \bar{\mu} O.$$

由于 n 是任意的，因而

$$If = \int f \mathrm{d}\bar{\mu}.$$

根据定理 22 存在一个内正则博雷尔测度 $\underline{\mu}$ 在 σ 有界博雷尔集上与 $\bar{\mu}$ 一致．由于仅有 μ 在 σ 有界贝尔集上的值进入 $\int f \mathrm{d}\mu$，我们有

$$If = \int f \mathrm{d}\underline{\mu}.$$

$\bar{\mu}$ 和 $\underline{\mu}$ 的惟一性证明留给读者．■

尽管这个定理常常称为里斯-马尔可夫定理，但它首先只是由 Markov[23] 对 I 为有界正线性泛函的情况建立的．当 $X=[a, b]$ 时的情形由 F. Riesz[24] 于 1909 年建立，当 X 为包含于 $\mathbf{R}^n$ 的紧子集的情形由拉东于 1913 年建立，当 X 是紧度量空间的情形由巴拿赫于 1937 年建立．这里给出的一般情形的定理，据我所见，它的最早印刷版是 Halmos[5].

习题

25. 证明定理 23 中的测度 $\bar{\mu}$ 和 $\underline{\mu}$ 的惟一性.

26. 令 $k(x, y)$ 为 $X \times Y$ 上的有界博雷尔可测函数，μ 和 v 分别是 X 和 Y 上的博雷尔测度，它们或者内正则或者拟正则. [354]

    a. 证明

    $$\iint \varphi(x) k(x,y) \psi(y) \mathrm{d}(\mu \times v) = \int \left[\int \varphi(x) k(x,y) \mathrm{d}\mu\right] \psi(y) \mathrm{d}v = \int \varphi(x) \left[\int k(x,y) \psi(y) \mathrm{d}v\right] \mathrm{d}\mu$$

    对于所有 $\varphi \in C_c(X)$ 和 $\psi \in C_c(Y)$ 成立.

    b. 证明对于所有 $\varphi \in C_0(X)$ 和 $\psi \in C_0(X)$(a) 成立.

    c. 对于所有属于 $C_c(X)$ 和 $C_c(Y)$ 的 φ 和 ψ，若(a)中的积分为 0，那么 $k=0$ a.e. $[\mu \times v]$.

13.5　$C(X)$ 上的有界线性泛函

令 X 为紧豪斯多夫空间，$C(X)$ 为 X 上的实值连续函数空间．在 13.4 节我们描述了 $C(X)$ 上的正线性泛函，本节将考虑 $C(X)$ 上的有界线性泛函．首先我们注意到，若 F 是一个 $C(X)$ 上的正线性泛函且 $|f| \leqslant 1$，则

$$|F(f)| \leqslant F(|f|) \leqslant F(1).$$

因此我们得到

$$\|F\| = F(1).$$

下一命题表明 $C(X)$ 上的每个有界线性泛函是两个正线性泛函的差. 由于定理的证明没有用到除 $C(X)$ 是包含 1 的有界函数的向量格以外的特殊性质，我们可在更一般的情况下叙述该命题. 对于 X 上的实值函数组成的向量空间 L，若只要 f 和 g 属于 L 就有 $f \vee g$ 和 $f \wedge g$ 属于 L，我们说 L 是一个向量格.

当我们定义 $\|f\| = \sup|f(x)|$ 时，向量格 L 成为一个赋范线性空间. 一个线性泛函有界，若存在 M 使得

$$|F(f)| \leqslant M\|f\|,$$

且如同通常的做法我们定义

$$\|F\| = \sup_{\|f\|\leqslant 1} F(f).$$

[355] **24. 命题** 令 L 为集合 X 上的有界函数的向量格，且假定 $1 \in L$. 则对于每个 L 上的有界线性泛函 F，存在两个正线性泛函 F_+ 和 F_- 使得 $F = F_+ - F_-$ 且 $\|F\| = F_+(1) + F_-(1)$.

证明 对 L 中的每个非负 f 定义

$$F_+(f) = \sup_{0\leqslant\varphi\leqslant f} F(\varphi).$$

那么 $F_+(f) \geqslant 0$，且 $F_+(f) \geqslant F(f)$. 此外，对于 $c \geqslant 0$，$F_+(cf) = cF_+(f)$. 令 f 和 g 为 L 内的两个非负函数. 若 $0 \leqslant \varphi \leqslant f$ 且 $0 \leqslant \psi \leqslant g$，则 $0 \leqslant \varphi + \psi \leqslant f + g$，因而

$$F_+(f+g) \geqslant F(\varphi) + F(\psi).$$

对所有这样的 φ 和 ψ 取上确界，我们得到

$$F_+(f+g) \geqslant F_+(f) + F_+(g).$$

另一方面，若 $0 \leqslant \psi \leqslant f+g$，则 $0 \leqslant \psi \wedge f \leqslant f$ 且因此 $0 \leqslant \psi - (\psi \wedge f) \leqslant g$，这就得到

$$\begin{aligned} F(\psi) &= F(\psi \wedge f) + F(\psi - [\psi \wedge f]) \\ &\leqslant F_+(f) + F_+(g). \end{aligned}$$

对所有这样的 ψ 取上确界，我们得到

$$F_+(f+g) \leqslant F_+(f) + F_+(g),$$

因而

$$F_+(f+g) = F_+(f) + F_+(g).$$

令 f 为 L 内的任意函数，并令 M 和 N 为使得 $f+M$ 与 $f+N$ 非负的两个非负常数. 那么

$$\begin{aligned} F_+(f+M+N) &= F_+(f+M) + F_+(N) \\ &= F_+(f+N) + F_+(M). \end{aligned}$$

因此

$$F_+(f+M) - F_+(M) = F_+(f+N) - F_+(N).$$

因此 $F_+(f+M) - F_+(M)$ 的值与 M 的选取无关. 我们定义 $F_+(f)$ 为这个值. 泛函 F_+ 是定义在所有的 L 上的，且我们有 $F_+(f+g) = F_+(f) + F_+(g)$ 且对于 $c \geqslant 0$，$F_+(cf) = cF_+(f)$. 由于 $F_+(-f) + F_+(f) = F_+(0) = 0$，因而有 $F_+(-f) = -F_+(f)$，且 F_+ 是 L 上的线性泛函.

由于 $0 \leqslant F_+(f)$ 且对于 $f \geqslant 0$，$F(f) \leqslant F_+(f)$，因此 F_+ 与线性泛函 $F_- = F_+ - F$ 是正线性

泛函，且 $F=F_+-F_-$. [356]

我们总是有 $\|F\|\leqslant\|F_+\|+\|F_-\|=F_+(1)+F_-(1)$. 为建立反向的不等式，令 φ 为 L 中使得 $0\leqslant\varphi\leqslant1$ 的任意函数. 那么 $|2\varphi-1|\leqslant1$，且

$$\|F\|\geqslant F(2\varphi-1)=2F(\varphi)-F(1).$$

对所有这样的 φ 取上确界，我们有

$$\begin{aligned}\|F\|&\geqslant 2F_+(1)-F(1)\\&=F_+(1)+F_-(1).\end{aligned}$$

因此 $\|F\|=F_+(1)+F_-(1)$. ■

25. 里斯表示定理 令 X 为紧豪斯多夫空间且 $C(X)$ 为 X 上的连续实值函数空间，那么对于 $C(X)$ 上的每个有界线性泛函 F 惟一存在对应于它的 X 上的有限带号贝尔测度 v 使得

$$F(f)=\int f\mathrm{d}v$$

对于每个属于 $C(X)$ 的 f 成立. 此外，$\|F\|=|v|(X)$.

证明 如命题 24 令 $F=F_+-F_-$. 那么根据定理 23 存在有限贝尔测度 μ_1 和 μ_2 使得

$$F_+(f)=\int f\mathrm{d}\mu_1$$

与

$$F_-(f)=\int f\mathrm{d}\mu_2.$$

若设 $v=\mu_1-\mu_2$，则 v 是一个有限带号贝尔测度，且

$$F(f)=\int f\mathrm{d}v.$$

现在

$$\begin{aligned}|F(f)|&\leqslant\int|f|\,\mathrm{d}|v|\\&\leqslant\|f\|\,|v|(X).\end{aligned}$$

[357]

因此 $\|F\|\leqslant|v|(X)$. 但

$$\begin{aligned}|v|(X)&\leqslant\mu_1(X)+\mu_2(X)\\&=F_+(1)+F_-(1)=\|F\|.\end{aligned}$$

因此 $\|F\|=|v|(X)$.

为证明 v 的惟一性，我们注意到若 v_1 和 v_2 都是有限带号贝尔测度使得

$$\int f\mathrm{d}v_i=F(f)$$

对 $i=1$，2 和 $f\in C(X)$ 成立，那么 $\lambda=v_1-v_2$ 是使得

$$\int f\mathrm{d}\lambda=0$$

对于所有 $f\in C(X)$ 成立的有限带号贝尔测度. 令 $\lambda=\lambda^+-\lambda^-$ 为 λ 的若当分解，那么关于 λ^+ 的积分给出的 $C(X)$ 上的正线性泛函与 λ^- 给出的相同，因而根据定理 23 必须有 $\lambda^+=\lambda^-$. 因此 $\lambda=0$，且 $v_1=v_2$. ■

26. 系 令 X 为紧豪斯多夫空间，那么 $C(X)$ 的对偶是(等距同构于) X 上的所有有限带号贝尔测度组成的空间范数 $\|v\|=|v|(X)$.

X 上的有限带号贝尔测度空间是 $C(X)$ 的对偶这一事实使我们能对该空间作出许多结论. 例如，从命题 10.3 知道贝尔测度空间是完备的，从定理 10.17 知道满足 $|v|(X)\leqslant 1$ 的贝尔测度的集合在弱*拓扑下紧. 习题中给出了一些这个结果的推论的探讨.

习题

27. 令 L 和 F 为命题 24 定义的泛函. 证明若 G 和 H 是两个 L 上的正线性泛函使得 $F=G-H$ 且 $G(1)+H(1)\leqslant\|F\|$，则 $G=F^+$ 且 $H=F^-$. [提示：用 F^+ 的定义证明 $G-F^+$ 是一个正线性泛函.]

358

28. 令 X 为紧豪斯多夫空间 $\mathcal{F}=\{f_\alpha\}$ 为 X 上的连续实值函数族，$\{c_\alpha\}$ 是相应的常数族. 假定对于每个有限集 $\{f_{\alpha_1}, \cdots, f_{\alpha_n}\}$ 存在带号贝尔测度 v 满足 $|v|(X)\leqslant 1$ 使得
$$\int f_{\alpha_i}\,\mathrm{d}v=c_{\alpha_i}.$$
那么存在一个有限带号贝尔测度 v 满足 $|v|(X)\leqslant 1$ 使得对于每个 f_α，
$$\int f_\alpha\,\mathrm{d}v=c_\alpha.$$

29. a. 令 X 为紧豪斯多夫空间且 $g, f_1, \cdots, f_n$ 是 X 上的连续实值函数. 假定存在一个 X 上的带号贝尔测度 v 满足 $|v|(X)\leqslant 1$ 且使得对于每个 i 有 $\int f_i\,\mathrm{d}v=c_i$，那么存在一个 X 上的带号贝尔测度 μ 满足 $|\mu|(X)\leqslant 1$ 使得
$$\int f_i\,\mathrm{d}\mu=c_i,$$
并且对任意满足 $|\lambda|(X)\leqslant 1$ 且使得 $\int f_i\,\mathrm{d}\lambda=c_i$ 的带号贝尔测度 λ 有
$$\int g\,\mathrm{d}\mu\leqslant\int g\,\mathrm{d}\lambda.$$

 b. 假定存在 X 上的贝尔测度 v 满足 $v(X)=1$ 且 $\int f_i\,\mathrm{d}v=c_i$，那么存在一个 X 上的贝尔测度 μ 满足 $\mu(X)=1$ 且 $\int f_i\,\mathrm{d}\mu=c_i$ 使得在所有满足这些条件的贝尔测度中最小化 $\int g\,\mathrm{d}\mu$.

 c. 令 $G, F_1, \cdots, F_n$ 为 $\mathbf{R}^m$ (=m 维欧几里得空间)上的连续函数，令 $f_1, \cdots, f_m$ 为 X 上的连续函数. 证明若存在一个贝尔测度 v 满足 $v(X)=1$ 使得
$$F_i\left(\int f_1\,\mathrm{d}v, \cdots, \int f_m\,\mathrm{d}v\right)=c_i,$$
则存在一个 X 上的贝尔测度在这些限制下最小化
$$G\left(\int f_1\,\mathrm{d}v, \cdots, \int f_m\,\mathrm{d}v\right).$$

30. 令 B 为紧豪斯多夫空间 X 上的带号贝尔测度组成的巴拿赫空间. B 的单位球的极值点是什么?

31. 斯通-魏尔斯特拉斯定理的另一证明．我们能够用本节的技巧和第 10 章的结果一起给出斯通-魏尔斯特拉斯定理的证明．该证明不依赖于引理 9．33，它归功于德布朗斯． 359

令$\mathfrak{a}$为紧空间 X 上的实值连续函数组成的代数，其分离点且包含常数．令$\mathfrak{a}^{\perp}$为 X 上的带号贝尔测度集使得 $|\mu|(X)\leqslant 1$ 且对于所有 $f\in\mathfrak{a}$，$\int f\mathrm{d}\mu=0$ 成立．

a. 用哈恩-巴拿赫定理和系 26 证明若$\mathfrak{a}^{\perp}$仅包含零测度，则$\overline{\mathfrak{a}}=C(X)$．

b. 用克赖因-米尔曼定理和 $C^{*}(X)$中的单位球的紧性证明若零测度是$\mathfrak{a}^{\perp}$仅有的极值点，那么$\mathfrak{a}^{\perp}$仅包含零测度．

c. 令 μ 为$\mathfrak{a}^{\perp}$的一个极值点．若 $f\in\mathfrak{a}$，$0\leqslant f\leqslant 1$，则由 $\mathrm{d}\mu_1=f\mathrm{d}\mu$ 和 $\mathrm{d}\mu_2=(1-f)\mathrm{d}\mu$ 给出的测度μ_1和μ_2属于$\mathfrak{a}^{\perp}$，并满足 $\|\mu_1\|+\|\mu_2\|=\|\mu\|$，且 $\mu_1+\mu_2=\mu$．由于 μ 是一个极值点，因而对于某个常数 c，$\mu_1=c\mu$．

d. 那么在 μ 的支撑上，$f-c\equiv 0$（见习题 24）．

e. 由于$\mathfrak{a}$分离点，因此 μ 的支撑至多能包含一个点．由于$\int 1\mathrm{d}\mu=0$，因此 μ 的支撑是空的，且 μ 是零测度． 360

第14章 不变测度

14.1 齐性空间

令 X 为局部紧豪斯多夫空间. 从 X 到其自身的同胚映射群 G 称为在 X 上传递的，若给定 X 的任意两个元素 x，y，存在一个同胚映射 $g\in G$ 使得 $g(x)=y$. 谈到齐性空间我们指的是局部紧豪斯多夫空间和 X 上同胚映射的传递群 G. 齐性空间的例子有：(1)直线 $\mathbf{R}$ 与平移群；(2)空间 $\mathbf{R}^n$ 与平移群；(3)空间 $\mathbf{R}^n$ 与刚体运动群，即随平移的旋转；(4)直线 $\mathbf{R}$ 与所有线性函数群 $g(x)=ax+b$，$a>0$. 若 G 是 X 上的同胚映射群，我们常常将 $g(x)$ 写为 gx 而将 $g[E]$ 写为 gE.

齐性空间上的贝尔或博雷尔测度 μ 称为不变测度，若对于每个可测集 E 与每个 $g\in G$，$\mu(gE)=\mu(E)$ 成立. 本章我们遵从第13章的用法，要求 X 上的博雷尔测度为紧集上的有限测度[⊖]. 我们想知道在何种条件下一个齐性空间 (X, G) 有不恒为零的不变贝尔或博雷尔测度.

361

并非每个局部紧空间上的同胚映射的传递群具有非零不变测度. 若我们取 $\mathbf{R}$ 上的群 G 由所有线性函数 $g(x)=ax+b$(其中 $a>0$)组成，那么任何两个区间 $[\alpha, \beta)$ 与 $[\gamma, \delta)$ 区间在 G 下同余. 因此一个不变测度必须对 $[0, 2)$，$[0, 1)$，与 $[1, 2)$ 给出相同的测度. 但第一个区间是其余两个不相交的区间的并集，因而 $\mu([0, 2))=2\mu([0, 2))$. 因此 $\mu([0, 2))=0$，这是由于 $[0, 2)\subset[0, 2]$，而后者是紧的. 因此，所有区间测度为零，这就得到 $\mu(\mathbf{R})=0$.

为何 G 不具有不变测度就相当清楚了：一个开集，例如 $(0, 1)$，在 G 下有"任意大"的平移. 我们需要 G 上的条件以防止这种情况出现，而一个方便的条件是要求 G 具有拓扑等度连续性. 我们在下一节较为详细地讨论这个概念.

习题

1. 令 X 为在同胚映射群 G 下的齐性空间. 证明若 X 上的不变贝尔或博雷尔测度 μ 对于某个紧集有正值，那么对于每个开集 O，$\mu(O)>0$.
2. 令 (X, G) 为齐性空间.
   a. 若 v 是贝尔测度满足只要 K 是一个紧 G_δ 就有 $v(gK)=v(K)$，则 v 是不变的，即，$v(gE)=v(E)$ 对于任意贝尔集 E 成立.
   b. 若 v 是内正则博雷尔测度或拟正则博雷尔测度，则对于每个紧集 K，若 $v(gK)=v(K)$，v 是不变的.

14.2 拓扑等度连续性

本节我们讨论一个概念，这个概念称为拓扑等度连续性，它是等度连续性概念的推广. 令 $\mathcal{F}$ 为从拓扑空间 X 到拓扑空间 Y 的连续映射族，且 x 和 y 分别为 X 和 Y 中的点. 我们称 $\mathcal{F}$ 为

⊖ 在第12章和第15章的更一般的用法中，$\mathbf{R}^n$ 上的 α 维豪斯多夫测度 m_α 都是 $\mathbf{R}^n$ 上的刚体运动群 G 的不变博雷尔测度. 仅当 $\alpha=n$ 时它们满足在所有紧集上有限的准则.

在点 x 和 y 的**拓扑等度连续**，若给定任何包含 y 的开集 O，存在 x 的邻域 U 和 y 的邻域 V 使得对于每个 $f\in\mathcal{F}$，只要 $f[U]\cap V$ 非空，就有 $f[U]\subset O$. 我们说 $\mathcal{F}$ 在点 x 拓扑等度连续，若对于每个 $y\in Y$ 它在点 x 和 y 拓扑等度连续，我们说 $\mathcal{F}$ 拓扑等度连续，若它在每个点 $x\in X$ 拓扑等度连续. 若 Y 是度量空间且函数族 $\mathcal{F}$ 在 x 等度连续，则它在 x 点拓扑等度连续. 以下命题表达了等度连续族的有用性质： 362

1. 命题 *令 $\mathcal{F}$ 为从 X 到 Y 的映射族且在 $x\in X$ 拓扑等度连续，那么，给定 $K\subset O\subset Y$ 满足 K 紧和 O 开，存在一个 x 的邻域 U 使得只要 $f\in\mathcal{F}$ 且 $f[U]$ 与 K 相交，就有 $f[U]\subset O$.*

证明 对于每个 $y\in K$ 存在 x 的邻域 $U(y)$ 与 y 的邻域 $V(y)$ 使得只要 $f[U(y)]$ 与 $V(y)$ 相交就有 $f[U(y)]\subset O$. 用邻域 $V(y)$ 中的有限个 V_1，…，V_n 覆盖 K 且令 U_1，…，U_n 为相应 x 的邻域. 令 $U=\bigcap U_j$，那么若 $f[U]$ 与 K 相交，则它必须与某个 V_j 相交. 由于 $f[U]\subset f[U_j]$，$f[U_j]$ 与 V_j 相交，因而 $f[U_j]\subset O$. 因此 $f[U]\subset f[U_j]\subset O$. ■

若取命题的开集 O 为与 K 不相交的闭集的补，则该命题有以下的重述：

2. 系 *设 F 和 K 为 Y 的不相交子集满足 F 闭 K 紧. 若 $\mathcal{F}$ 为从 X 到 Y 的映射族且在点 x 拓扑等度连续，那么存在 x 的邻域 U 使得对于任意 $f\in\mathcal{F}$，$f[U]$ 不与 F 和 K 都相交.*

我们现在转向当 G 是拓扑空间 X 到其自身的同胚映射的传递群的情形.

3. 命题 *设 G 是拓扑空间 X 上的同胚映射的传递群. 若 G 在某个点 x_0 和 y_0 拓扑等度连续，则 G 拓扑等度连续(在每个 x 和 y).*

证明 令 $\langle x, y\rangle$ 为 X 的任意点对. 由于 G 是传递的，因而存在 G 的元素 g 和 h 使得 $x=gx_0$，$y=hy_0$. 给定任何包含 y 的开集 O，集合 $h^{-1}[O]$ 是一个包含 y_0 的开集. 若 G 在 x_0，y_0 拓扑等度连续，则存在 x_0 的邻域 U_0 和 y_0 的邻域 V_0 使得对于每个 $f\in G$ 只要 $f[U_0]$ 与 V_0 相交，就有 $f[U_0]\subset h^{-1}[O]$. 设 $U=g[V_0]$ 与 $V=h[V_0]$，那么 U 和 V 分别是 x 和 y 的邻域. 假定对某个 $f\in G$，$f[U]$ 与 V 相交，即存在一个 $u\in U$ 使得 $f(u)=v\in V$. 那么 $h^{-1}(v)\in V_0$，$g^{-1}(u)\in U_0$，因而 $h^{-1}\circ f\circ g[U_0]\subset h^{-1}[O]$. 这蕴涵 $f[U]\subset O$，且我们已证明 G 在 x 和 y 的拓扑等度连续. ■ 363

我们将以下系的证明留给读者.

4. 系 *令 G 为拓扑空间 X 上的同胚映射的传递群，p 是 X 的点. 那么 G 拓扑等度连续当且仅当给定任何包含 p 的开集 O，存在 p 的邻域 U 使得对于任意 $f\in G$ 只要 $f[U]$ 与 U 相交，就有 $f[U]\subset O$.*

我们引入的拓扑等度连续的性质稍强于凯利和莫尔斯(见[9]，234 页)引入的均匀连续的性质. 因此，拓扑等度连续性具有凯利和莫尔斯从均匀连续性导出的所有性质，包括阿斯科利定理的一般版本. 在 Y 足够紧的条件下均匀连续性、拓扑等度连续性、等度连续性这三个概念重合(参见[9]，定理 7.23). 我们已经发现拓扑等度连续性比均匀连续性更便于使用，人们可给出均匀连续但不拓扑等度连续的映射族的例子，但不知道是否有一个同胚映射的传递群，它均匀连续且不拓扑等度连续.

习题

3. a. 令 $\mathcal{F}$ 为从拓扑空间 X 到度量空间 (Y, ρ) 的映射族. 回忆 $\mathcal{F}$ 在 x 等度连续，若给定 $\varepsilon>0$，

存在 x 的邻域 U 使得对于所有 $f\in\mathcal{F}$ 与所有 $x'\in U$，$\rho(f(x), f(x'))<\varepsilon$. 证明若 $\mathcal{F}$ 在 x 点等度连续，则 $\mathcal{F}$ 在 x 点拓扑等度连续.

b. 假定 Y 是紧的. 证明在 x 点拓扑等度连续蕴涵等度连续.

4. 令 X 为度量空间且 G 是它的等距群. 证明 G 等度连续因此拓扑等度连续.

5. 从拓扑空间 X 到拓扑空间 Y 的映射族 $\mathcal{F}$ 说为(在 x 和 y)均匀连续，若给定任何包含 y 的开集 O，存在 x 的邻域 U 和 y 的邻域 V 使得只要 $f(x)\in V$ 就有 $f[U]\subset O$.

364

a. 证明拓扑等度连续蕴涵均匀连续.

b. 给出一个从 $\mathbf{R}$ 到 $\mathbf{R}$ 的均匀连续但不是拓扑等度连续的映射族 $\mathcal{F}$ 的例子.

c. 令 $\mathcal{F}$ 为从 X 到 Y 的映射族. 假定 $x\in X$ 有一个邻域 W 使得 $\mathcal{F}[W]$ 有紧闭包. 那么 $\mathcal{F}$ 在 x 均匀连续蕴涵 $\mathcal{F}$ 在 x 拓扑等度连续. (用 Kelley[9]，定理 6.30 和 7.23.)

6. 令 $\mathcal{F}$ 为从拓扑空间 X 到一致空间 Y 的映射族. 若 $\mathcal{F}$ 在 x 等度连续，则它在 x 拓扑等度连续. (参见 Kelley[9]，232 页.)

7. a. 令 G 为豪斯多夫空间 X 上的同胚映射的拓扑等度连续传递群. 证明存在 X 的一致结构 $\mathcal{V}$ 使得每个 $g\in G$ 将 $\mathcal{V}$ 的每个元素映到其自身；即若 $V\in\mathcal{V}$，那么对于每个 $g\in G$ 有 $\{\langle gu, gv\rangle: \langle u, v\rangle\in V\}=V$. (固定点 $p\in X$. 对于 p 的每个邻域 U，令 $V_U=\{\langle x, y\rangle: \exists g\in G$ 满足 $gx\in U$ 且 $gy\in U\}$. 那么 $\{V_U\}$ 是所要求的一致结构的基.)

b. 假定 X 的拓扑在 p 点有可数基. 那么 X 可度量化使得 G 是等距群.

14.3　不变测度的存在性

令 G 为局部紧豪斯多夫空间 X 上的同胚映射的传递的拓扑等度连续群. 本节的目标是说明在 G 作用下不变的非零博雷尔测度的存在性. 谈到非零博雷尔测度，我们指的是在每个紧集上有限且在某些紧集上是正的博雷尔测度 μ. 若非零博雷尔测度是不变的，则对于每个开集 O 有 $\mu O>0$.

若 E 是 X 的子集且 g 是 G 的元素，我们称 $gE=g[E]$ 为 E 的 *g 平移*. 对于集合 F，若存在某个 $g\in G$ 使得 $F=gE$，则称集合 F 为 E 的平移. 我们有时将这称为 E 与 F 同余(在 G 下). 因此不变测度将同余集对赋予相同的值.

固定一个点 $p\in X$ 作为基点是方便的. 令 $\mathcal{U}$ 为开集簇 U 满足 $p\in U$ 与 $\bar{U}$ 紧. 由于 X 是局部紧，$\mathcal{U}$ 是拓扑在点 p 的基，$\mathcal{U}$ 中集合的平移形成的集簇构成 X 的拓扑基. 令 H 为包含 p 作为内点的紧集，因此 $H^\circ\in\mathcal{U}$. 我们将用 H 归范化我们的构造使得 $\mu H=1$.

365

若 E 是任意有界集且 F 是具有非空内部的任意集，我们总是能够用有限个 F 的平移覆盖 E(这是由于我们能够用有限个 F° 的平移覆盖 $\bar{E}$). 定义 E 的 *F 覆盖数* $[E:F]$ 为用于覆盖 E 的 F 的平移的最小个数. 因此 $[E:F]$ 是非负整数且当 $E\neq\varnothing$ 时它是正的. 这个覆盖数具有不变性质

$$[gE:F]=[E:F]=[E:gF].$$

若 $A\subset B$，则 $[A:F]\leqslant[B:F]$. 若 A 是一个具有非空内部的有界集，则覆盖数 $[E:A]$ 和 $[A:F]$ 有定义，且我们有

$$[E:F] \leqslant [E:A] \cdot [A:F].$$

这是因为我们能用$[E:A]$个 A 的平移覆盖 E 且用$[A:F]$个 F 的平移覆盖每个 A 的平移. 这就给出了覆盖 E 的$[E:A]\cdot[A:F]$个 F 的平移.

若固定 E，对$\mathfrak{U}$内的不同集合观察覆盖数$[E:U]$，我们发现当 U 变小时$[E:U]$变大. 为控制这一点，我们考虑对于每个 U，规范化覆盖比为

$$\xi_U(E) = \frac{[E:U]}{[H:U]}.$$

由于

$$[E:U] \leqslant [E:H] \cdot [H:U],$$

我们有

$$\xi_U(E) \leqslant [E:H].$$

因此对于固定的 E，数 $\xi_U(E)$有界且与 U 无关.

对于一个固定的 U，集函数 ξ_U非负且不变，

$$\xi_U[gE] = \xi_U[E].$$

它也是次加性的，

$$\xi_U(E \cup F) \leqslant \xi_U(E) + \xi_U(F).$$

我们有 $\xi_U(H)=1$，且若 $E\subset F$，则 $\xi_U(E)\leqslant\xi_U(F)$.

令 K_1和 K_2为不相交的紧集. 由于 G 在 p 拓扑等度连续，因而存在 $U\in\mathfrak{U}$使得没有 U 的平移与K_1 和 K_2都相交(系 4). 因此任何由 U 的平移构成的$K_1\cup K_2$的覆盖必须是不相交的 K_1 和 K_2的覆盖的并集. 因此 [366]

$$\xi_U(K_1 \cup K_2) \geqslant \xi_U(K_1) + \xi_U(K_2).$$

这意味着，若当 U 变得越来越小时取 ξ_U的极限，则该极限是不变集函数，其在紧集上是加性的. 实现这一想法的一个方法是推广习题 10.20 中讨论过的巴拿赫极限的概念.

令 Ξ 为$\mathfrak{U}$上的所有有界实值函数构成的空间，我们记 $\xi\in\Xi$ 在 $U\in\mathfrak{U}$的值为 ξ_U，那么若定义

$$(\xi+\eta)_U = \xi_U + \eta_U$$

和

$$(\alpha\xi)_U = \alpha\xi_U.$$

则 Ξ 成为一个线性空间.

我们定义 Ξ 的元素的$\overline{\lim}$为

$$\overline{\lim}\,\xi = \inf_{U\in\mathfrak{U}} \sup_{V\subset U} \xi_V.$$

类似地，

$$\underline{\lim}\,\xi = \sup_{U\in\mathfrak{U}} \inf_{V\subset U} \xi_V.$$

容易证明

$$\overline{\lim}(\xi+\eta) \leqslant \overline{\lim}\,\xi + \overline{\lim}\,\eta$$

且对于 $\alpha\geqslant 0$

$$\overline{\lim}\alpha\xi = \alpha\,\overline{\lim}\xi$$

也有

$$\underline{\lim}\xi = -\overline{\lim}(-\xi).$$

若现在取 $p(\xi)=\overline{\lim}\xi$，我们看到 p 是次加性的与正齐次．根据哈恩-巴拿赫延拓定理，Ξ 的零子空间上的零泛函可延拓为定义在所有 Ξ 上的线性泛函 Lim 满足

$$\mathrm{Lim}\xi \leqslant \overline{\lim}\xi.$$

我们有

367

$$-\mathrm{Lim}\xi = \mathrm{Lim}(-\xi) \leqslant \overline{\lim}(-\xi) = -\underline{\lim}\xi,$$

这就得到

$$\underline{\lim}\xi \leqslant \mathrm{Lim}\xi \leqslant \overline{\lim}\xi.$$

若从每个 U 起 ξ 是常数序列，即若 $\xi_V=c$ 对于所有 $V\subset U$ 成立，则 $\overline{\lim}\xi=c$ 且 $\underline{\lim}\xi=c$．相应地，若 ξ 最终为常数，则

$$\mathrm{Lim}\xi = c,$$

若对于某个 U 有 $\xi_V=\eta_V$ 对所有 $V\subset U$ 成立，我们说 ξ 和 η 是最终相等的．这种情形下 $\xi-\eta$ 最终为 0，因而

$$\mathrm{Lim}\xi - \mathrm{Lim}\eta = \mathrm{Lim}(\xi-\eta) = 0,$$

这就得到

$$\mathrm{Lim}\xi = \mathrm{Lim}\eta.$$

若对于所有 U，$\xi_U\geqslant\eta_U$，则我们说 $\xi\geqslant\eta$．若 $\xi\geqslant 0$，则 $\underline{\lim}\xi\geqslant 0$．因此

$$\text{对于 } \xi\geqslant 0,\ \mathrm{Lim}\xi\geqslant 0.$$

因此若 $\xi>\eta$，我们有 $\xi-\eta\geqslant 0$，因而

$$\mathrm{Lim}\xi - \mathrm{Lim}\eta = \mathrm{Lim}(\xi-\eta) \geqslant 0.$$

因此

$$\text{对于 } \xi\geqslant\eta,\ \mathrm{Lim}\xi\geqslant \mathrm{Lim}\eta.$$

对于每个有界集 E，覆盖率 $\xi_U(E)$ 给出了 Ξ 的一个元素．定义紧集上的函数 λ 为

$$\lambda(K) = \mathrm{Lim}\xi_U(K).$$

由于 $\xi_U(gK)=\xi_U(K)$，因而对于每个 $g\in G$ 我们有

$$\lambda(gK) = \lambda(K).$$

假定 K_1 和 K_2 为不相交的紧集，那么存在一个 U 属于 $\mathfrak{U}$，使得没有 U 的平移与 K_1 和 K_2 都相交，因而对于所有 $V\subset U$

$$\xi_V(K_1\cup K_2) = \xi_V(K_1)+\xi_V(K_2)$$

因此

368

$$\begin{aligned}\mathrm{Lim}\xi_V(K_1\cup K_2) &= \mathrm{Lim}(\xi_V(K_1)+\xi_V(K_2))\\ &= \mathrm{Lim}\xi_V(K_1)+\mathrm{Lim}\xi_V(K_2).\end{aligned}$$

相应地，

$$\lambda(K_1\cup K_2) = \lambda(K_1)+\lambda(K_2)$$

对任意两个不相交的紧集成立. 对于规范化集 H 我们有 $\xi_U(H)=1$，这就得到 $\lambda(H)=1$. 若 $E\subset F$，则 $\xi_U(E)\leqslant\xi_U(F)$，因而 $\lambda E\leqslant\lambda F$.

我们的结果可概括成以下命题：

5. 命题 令 G 为局部紧豪斯多夫空间 X 上的传递的拓扑等度连续的同胚群，令 H 为具有非空内部的紧集，那么存在一个定义在所有紧集上的实值函数 λ，使得

i. $K_1\subset K_2\Rightarrow\lambda K_1\subset\lambda K_2$.

ii. $\lambda(K_1\cup K_2)=\lambda K_1+\lambda K_2$ 若 $K_1\cap K_2=\varnothing$.

iii. $\lambda H=1$.

iv. 对于所有 $g\in G$，$\lambda(gK)=\lambda K$.

集函数 λ 是第 13.3 节意义下的内容. 根据命题 13.21，存在一个拟正则博雷尔测度 $\bar{\mu}$ 使得

$$\bar{\mu}O=\sup\{\lambda K:K\subset O,K\text{ 紧}\}.$$

由于 $\lambda(gK)=\lambda K$ 对于所有 K 成立，我们有 $\bar{\mu}(gO)=\bar{\mu}O$ 对于所有开集成立. 由于 $\bar{\mu}$ 是外正则的，对于所有可测集 E 有 $\bar{\mu}(gE)=\bar{\mu}E$. 若我们定义

$$\underline{\mu}E=\sup\{\bar{\mu}B:B\subset E,B\text{ 是 }\sigma\text{ 有界博雷尔集}\},$$

如同在定理 13.22 的证明中一样，我们得到一个内正则博雷尔测度. 显然，这个测度是不变的. 对于集合 H，根据命题 13.21 有

$$\bar{\mu}H\geqslant\lambda H=1.$$

由于 $\underline{\mu}$ 和 $\bar{\mu}$ 在 σ 有界集上一致，

$$\underline{\mu}H=\bar{\mu}H\geqslant 1.$$

因此 $\bar{\mu}$ 和 $\underline{\mu}$ 是非平凡博雷尔测度且因此在所有开集上为正. 我们将这些结果概括成以下定理：

6. 定理 令 G 为局部紧豪斯多夫空间 X 上的传递的拓扑等度连续的同胚群，那么存在一个拟正则博雷尔测度 $\bar{\mu}$ 在 G 作用下不变，在紧集上有限，在每个开集上为正. 也存在具有这些性质的内正则博雷尔测度 $\underline{\mu}$.

369

可以证明测度 $\bar{\mu}$ 和 $\underline{\mu}$ 是惟一的，但在一般的拓扑等度连续群框架下证明它超出了本书的范围. 在 14.6 节我们将对几个重要情形建立惟一性.

应该注意到我们仅有一个地方的推导用到了 G 的拓扑等度连续性，即给定不相交的紧集 K_1 和 K_2，存在 p 的邻域 U，它的任何平移都不与 K_1 和 K_2 同时相交. 这比拓扑等度连续稍弱，它等价于(在局部紧空间)说，给定紧集 K 和闭集 F 不相交，我们能找到一个 U 使得没有 U 的平移与 K 和 F 都相交. 因此若 G 满足这个较弱条件我们仍可断言不变博雷尔测度的存在性. 我不知道在这种更为一般的情形中不变测度是否惟一.

习题

8. 群 G 称为几乎传递若对于每个 x 集合 $\{gx: g\in G\}$ 在 X 稠密. 证明若仅要求 g 几乎传递则定理 6 仍然成立.
9. 令 μ 为齐性空间 (X, G) 上的不变测度，且 f 是 X 上的 μ 可积函数，那么

$$\int_X f(gx)\mathrm{d}\mu(x) = \int_X f(x)\mathrm{d}\mu(x).$$

14.4 拓扑群

令 G 为抽象群. 我们通常将群的运算写为乘法，因此 x 和 y 的乘积记为 xy 且 x 的逆记为 x^{-1}. 我们把单位元记为 e. 若 A 和 B 是 G 的子集，我们写 AB 来表示集合 $\{z: z=xy, x\in A, y\in B\}$ 且写 A^{-1} 表示集合 $\{z: z=x^{-1}, x\in A\}$. 我们也将 $\{x\}A$ 简写为 xA 且将 $A\{y\}$ 简写为 Ay.

G 的一个拓扑 $\mathcal{J}$ 称为 G 的不变拓扑，若乘法在每个因子是连续的(分离地). 若 $\mathcal{J}$ 是 G 上的不变拓扑，则 G 可以用两种方式被认为是其自身上的同胚映射群：对于每个 $g\in G$，令 l_g 为如下定义的 G 到 G 的映射

370

$$l_g(x) = gx.$$

那么 l_g 是一对一映上并且是连续的，这是由于乘法对第二因子是连续的. 它的逆映射 $l_{g^{-1}}$ 也是连续的. 因此 l_g 是 G 到 G 的同胚映射. 我们有

$$l_g l_h = l_{gh},$$

且将 g 映射为 l_g 的映射 l 是一个 G 到群 G_L 的同胚映射，而群 G_L 是 G 到其自身的同胚映射群. 由于 G 的不同元素给出了不同的同胚映射，因此 l 是同构映射. 群 G_L 称为 G 的*左平移群*. 我们有时将 G_L 等同于 G 并且说 G 通过左平移作用于 G. 由于 $y=(yx^{-1})x$，因此群 G_L 在 G 上是传递的.

我们也可考虑映射 r_g，其定义为 $r_g(x)=xg$. 这些映射仍然构成 G 到 G 的同胚映射的传递群. 由于

$$r_g r_h = r_{hg},$$

我们看到映射 r 是一个 G 到群 G_R 映射的反同构. 群 G_R 称为 G 到其自身的*右平移群*. 在 G 为交换群的情形中，$l_g=r_g$ 且 $G_R=G_L$.

我们注意到 G 的不变拓扑由任意一点的邻域基确定，这一点非常重要. 以下引理叙述了这一事实和相关的事实，其证明留给读者.

7. 引理 *令 G 为群且 $\mathcal{J}$ 是 G 的拓扑，那么 $\mathcal{J}$ 是 G 的不变拓扑，当且仅当给定 $\mathcal{J}$ 在 e 的基 $\mathcal{U}$，集簇*

$$g\,\mathcal{U} = \{V: V = gU, U\in\mathcal{U}\} \text{ 和 } \mathcal{U}\,g = \{V: V = Ug, U\in\mathcal{U}\}$$

都是 $\mathcal{J}$ 在 g 的基.

8. 引理 *令 $(G, \mathcal{J})$ 和 $(H, \mathcal{S})$ 为具有不变拓扑的群，那么同态映射 $\varphi: G\to H$ 连续当且仅当它在 e 连续.*

对于 G 的拓扑 $\mathcal{J}$，若乘法是共同连续且逆是连续的，即映射 $\langle x, y\rangle\to xy$ 是从 $G\times G$ 到 G 的连续映射且映射 $x\to x^{-1}$ 是从 G 到 G 的连续映射，我们称 $\mathcal{J}$ 为 G 的一个**群拓扑**. 一个群拓扑是一个不变拓扑. 谈到**拓扑群**意味着赋予豪斯多夫群拓扑的群 G. $\mathcal{J}$ 为群拓扑的两个条件可以组合成为单个条件，即从 $G\times G$ 到 G 的映射 $\langle x, y\rangle\to xy^{-1}$ 是连续的.

371

9. 引理 *令 $\mathcal{J}$ 为对于 G 的群拓扑且 O 为包含 e 的开集，那么存在一个包含 e 的开集 U 满足*

$U=U^{-1}$ 且 $U\cdot U\cdot U\subset O$.

证明　由于乘法在 e 共同连续，因而存在 e 的邻域 W_1 和 W_2 使得 $W_1W_2\subset O$. 集合 $W=W_1\cap W_2$ 是开的且满足 $W\cdot W\subset O$. 用 W 代替 O 重复这一过程，存在一个包含 e 的开集 V 使得 $V\cdot V\subset W$. 那么

$$V\cdot V\cdot V\subset V\cdot V\cdot V\cdot V\subset W\cdot W\subset O.$$

由于 V^{-1} 是开的，因此集合 $U=V\cap V^{-1}$ 是满足所要求性质的开集. ■

接下来的两个命题叙述了拓扑群的有用性质. 我们把证明留给读者.

10. 命题　令 G 为拓扑群，那么存在 e 点的拓扑基 $\mathfrak{U}$ 满足

i. 给定 $U\in\mathfrak{U}$，$\exists V\in\mathfrak{U}$ 满足 $V\cdot V\subset U$.

ii. 若 $U\in\mathfrak{U}$，则 $U^{-1}=U$.

iii. 若 U，$V\in\mathfrak{U}$，则 $U\cap V\in\mathfrak{U}$.

iv. 若 $U\in\mathfrak{U}$，且 $g\in G$，则 $gUg^{-1}\in\mathfrak{U}$.

v. 若 $u\in U\in\mathfrak{U}$，则 $\exists V\in\mathfrak{U}$ 满足 $uV\subset U$ 与 $Vu\subset U$.

vi. $\bigcap U=\{e\}$.

反过来，给定任何满足条件(i)到(vi)的抽象群 G 的子集簇 $\mathfrak{U}$ 是 G 上的群拓扑在 e 的基.

11. 引理　令 G 为拓扑群且 E 是 G 的任意子集，那么

$$\overline{E}=\bigcap_{U\in\mathfrak{U}}\{U\cdot E\}=\bigcap_{U\in\mathfrak{U}}\{E\cdot U\},$$

其中 $\mathfrak{U}$ 是在 e 的邻域的基.

372

12. 引理　令 G 为一个群且 U 是包含 e 的集合，那么

$$\{w:w\in gU,gU\text{ 与 }U\text{ 相交}\}=U\cdot U^{-1}\cdot U,$$

且

$$\{w:w\in Ug,Ug\text{ 与 }U\text{ 相交}\}=U\cdot U^{-1}\cdot U.$$

证明　我们注意到 gU 与 U 相交当且仅当存在属于 U 的 u_1 和 u_2 满足 $u_1=gu_2$. 因此 $\{g:gU$ 与 U 相交$\}$ 是 $U\cdot U^{-1}$，因而 $\{w:w\in gU,gU$ 与 U 相交$\}$ 是 $U\cdot U^{-1}\cdot U$. 类似地，第二个等式成立. ■

13. 命题　令 $(G,\mathfrak{J})$ 为拓扑群，那么 G 上的左平移群是 G 上的一个传递的拓扑等度连续群的同胚映射群. G 的右平移群也如此.

证明　这是引理 12 和命题 3 的直接结果. ■

对于拓扑群 G 上的博雷尔测度 μ，若 $\mu(gE)=\mu E$ 对于每个 $g\in G$ 和每个博雷尔集 E 成立，则我们称它为**左不变的**. 因此若 μ 在左平移群不变则它是左不变的. 类似地，博雷尔测度 v 称为右不变的，若 $v(Eg)=vE$，即在右平移群不变. 由于这些平移群的每一个是传递的且为拓扑等度连续，因此定理 6 给出下面定理：

14. 定理　令 G 为局部紧拓扑群，那么存在一个内正则博雷尔测度 $\underline{\mu}$ 和一个拟正则博雷尔测度 $\overline{\mu}$，它们左不变且在开集上是正的. 类似地，存在右不变测度 $\underline{v}$ 和 $\overline{v}$，它们分别是内正则和拟正则的，且在开集上是正的.

局部紧群的不变测度常常称为**哈尔测度**，若它左不变则称为左哈尔测度，若它右不变则称

为右哈尔测度. 我们通常想要它满足一些正则性条件且允许它为完备的，为确定起见要求它内正则且完备. 因此一个局部紧群 G 上的左哈尔测度是一个内正则左不变博雷尔测度的完备化，对右哈尔测度也有类似的结论. 在 14.6 节我们将证明在满足这些正则性的条件下，在相差一个常数因子的意义下，左哈尔测度和右哈尔测度是惟一的，虽然在非交换群上左哈尔测度一般不等于右哈尔测度.

373

以下关于局部紧群的命题以后有用. 习题 19 给出了关于如何证明该命题的提示.

15. 命题 令 G 为局部紧群，那么 G 有一个既开又闭的 σ 紧子群 H.

我们将发现以下命题和它的系在以后有用. 我们将它们的证明留给读者.

16. 命题 令 G 为局部紧群，φ 是 G 上具有紧支撑的连续实值函数. 那么给定 $\varepsilon>0$，存在 e 的邻域 U 使得对所有 $u\in U$ 和所有 $x\in G$ 有 $|\varphi(ux)-\varphi(x)|<\varepsilon$ 且 $|\varphi(xu)-\varphi(x)|<\varepsilon$.

该命题实际上说的是 φ 一致连续.

17. 系 令 G 为局部紧群，μ 是 G 上的贝尔测度，φ 是一个具有紧支撑的连续函数，那么函数 $\Delta(x)=\int_G\varphi(yx)\mathrm{d}\mu(y)$ 是连续的. 若 μ 在开集上是正的，则 $\Delta(x)>0$.

习题

10. 证明引理 7.
11. 证明引理 8.
12. 令 G 为具有拓扑 $\mathcal{J}$ 的群，证明 $\mathcal{J}$ 是群拓扑当且仅当映射 $\langle x, y\rangle\to xy^{-1}$ 是连续的.
13. 证明命题 10.
14. 证明引理 11.
15. 令 G 为群且 $\mathfrak{U}$ 是包含 e 的集簇，那么 $\mathfrak{U}$ 是 G 的群拓扑在 e 的基当且仅当以下条件满足：

    i. 给定 $U\in\mathfrak{U}$，$\exists V\in\mathfrak{U}$ 满足 $V\cdot V\subset U$.

    ii. 若 $U\in\mathfrak{U}$，$\exists V\in\mathfrak{U}$ 满足 $V\subset U^{-1}$.

    iii. 若 U，$V\in\mathfrak{U}$，$\exists W\in\mathfrak{U}$ 满足 $W\subset U\cap V$.

    iv. 若 $U\in\mathfrak{U}$，$g\in G$，$\exists V\in\mathfrak{U}$ 满足 $V\subset gUg^{-1}$.

    v. 若 $u\in U\in\mathfrak{U}$，则 $\exists V\in\mathfrak{U}$ 满足 $uV\subset U$.

    这个拓扑是豪斯多夫的当且仅当 $\bigcap U=\{e\}$.

374

16. 令 G 为局部紧拓扑群.

    a. 若 μ 是左不变博雷尔测度且 f 是 μ 可积函数，则
    $$\int_G f(yx)\mathrm{d}\mu(x)=\int_G f(x)\mathrm{d}\mu(x)$$
    对于每个 $y\in G$ 成立.

    b. 若 μ 是使得(a)的结论对于每个具有紧支撑的连续函数 f 成立的内正则博雷尔测度，则 μ 左不变.

    c. 若 v 是右不变博雷尔测度且 f 关于 v 可积，则
    $$\int_G f(xy)\mathrm{d}v(x)=\int_G f(x)\mathrm{d}v(x).$$

17. 令 μ 为一个左不变博雷尔测度且定义博雷尔测度 v 为 $v[E]=\mu[E^{-1}]$，那么 v 是一个右不变测度.

18. 令 G 是一个局部紧群.

    a. 将 x 映到 x^{-1} 的映射是一个 G 到 G 的博雷尔同构.

    b. 将 $\langle x, y\rangle$ 映到 xy 的映射是一个从 $G\times G$ 到 G 的博雷尔可测映射.

    c. 将 $\langle x, y\rangle$ 映到 xy^{-1} 的映射是一个从 $G\times G$ 到 G 的博雷尔可测映射.

19. 令 G 为拓扑群.

    a. 若 $K\subset L$ 紧，则对于每个 $g\in G$，gK 和 Kg 也是紧的.

    b. 若 K 紧，则 K^{-1} 也紧.

    c. 若 K_1 和 K_2 是 G 的紧子集，则 K_1K_2 和 $K_1K_2^{-1}$ 也是紧的.

    d. 若用"有界"或"σ 有界"代替"紧"，则命题 a，b，c 仍成立.

    e. 若 O 是开集且 E 是一个任意子集，则 OE 和 EO 是开的.

20. 证明命题15.

    a. 证明拓扑群的开子群 H 是闭的.

    [提示：$\sim H=\bigcup\limits_{g\notin H}gH$.]

    b. 令 U 为 e 的邻域满足 $U=U^{-1}$ 且 $\overline{U}$ 紧. 设 $U_n=U_{n-1}\cdot U$，$U_1=U$，那么 U_n 是开的且 $\overline{U}_n\subset U_{n+1}$.

    c. 令 $H=\bigcup U_n$，那么 H 是 σ 紧与开的.

    d. 证明 H 是一个子群.

21. 证明命题16.

    a. 令 K 为 φ 的支撑. 对于每个 $x\in K$ 存在一个 e 的邻域 V_x 使得对于 $u, v\in V_x$，$|\varphi(ux)-\varphi(vx)|<\varepsilon/2$ 且 $|\varphi(xu)-\varphi(xv)|<\varepsilon/2$.

    b. 对于每个 V_x 存在一个 e 的邻域 U_x 满足 $U_x\cdot U_x\subset V_x$. 证明存在有限个 $x_1, \cdots, x_n$ 使得集合 $\{x_iU_{x_i}\}$ 和集合 $\{U_{x_i}x_i\}$ 覆盖 K.

    c. 集合 $U=\bigcap U_{x_i}$ 可用于该命题.

22. 证明系17.

375

14.5 群作用与商空间

令 G 为拓扑群且 X 为拓扑空间. 谈到 G 在 X 上的**左作用**，我们指的是连续映射 $\varphi: G\times X\to X$，它使得

$$\varphi(e,x)=x$$

且

$$\varphi(g,\varphi(h,x))=\varphi(gh,x).$$

我们经常将 $\varphi(g, x)$ 写作 gx，有了这个记号 φ 的条件成为

$$ex=x,$$

和

$$g(hx)=(gh)x.$$

我们有时将左作用说为作用并且说 G 作用于 X. 一个作用称为**开的**，若对于 G 内的每个开集 O 和每个 $x\in X$，$O\cdot x$ 是 X 的开子集. 因此一个作用 φ 是开的当且仅当对于每个 $x\in X$，定义为 $\varphi_x(g)=gx$ 的映射 φ_x: $G\to X$ 是开映射.

G 在 X 的作用说为传递的，若对于每个 x 和 y 属于 X 存在 $g\in G$ 满足 $y=gx$. 若一个传递作用对于一个 $x\in X$，φ_x 是开映射，则它是开的. 事实上，若存在一个 $x\in X$ 使得对 G 在 e 点的某个拓扑基 $\mathfrak{U}$ 内的每 U，Ux 是开的，则它是开的. 在开作用的情形下，我们说 G 开作用于 X.

376

一个作用说为适当的，若对于每个 $x\in X$ 映射 φ_x 是适当映射，即若对于每个紧集 $K\subset X$，$\varphi_x^{-1}[K]$是 G 的紧子集. 在适当作用的情形中，我们说 G 适当地作用于 X. 以下命题有时是有用的，其证明留给读者：

18. 命题　*若一个局部紧群 G 传递且适当地作用于局部紧空间，则该作用是开的.*

令 G 为拓扑群且 F 为 G 的一个闭子群. 对于 $g\in G$，集合 gF 称为 F 的(左)陪集. 注意到 F 的两个陪集要么不相交要么相同. 令 H 为 F 的所有陪集构成的集簇且令 φ: $G\to H$ 为将每个 g 映射到陪集 gF 的映射. 定义 H 的集合 O 为开的，若 O 内的陪集的并集是 G 的开集. 这就定义了一个 H 的豪斯多夫拓扑，我们称之为商拓扑. 映射 φ 是一个连续开映射并且是一个 G 在 H 上的左作用. 具有该拓扑的空间 H 称为 G 通过 F 的(左)商，记为 G/F. 映射 φ 称为 G 到 G/F 上的自然投影. 商 G/F 可赋予群结构使得当且仅当 F 是正规子群时 φ 是一个同态映射.

若 G 是局部紧，则 G/F 也是局部紧，且映射 φ 是适当的当且仅当 F 是紧的.

令 ψ 为拓扑群 G 在 X 上的传递作用，且令 H 为点 $p\in X$ 的迷向子群，那么 H 是闭的，且存在一对一连续映射 θ: $G/H\to X$ 使得 $\psi=\theta\circ\varphi$. 当且仅当 ψ 是开的映射 θ 是同胚映射.

由于已经定义了左作用，我们也定义右作用. 一个从 $G\times X$ 到 X 的连续映射 φ 称为一个**右作用**，若

$$\varphi(e,x)=x$$

且

$$\varphi(g,\varphi(h,x))=\varphi(hg,x).$$

一个右作用常常写为 $\varphi(g,x)=xg$. 那么这些条件成为

$$xe=x$$

与

377

$$(xh)g=x(hg).$$

拓扑群的右平移形成的集合给出了群 G 对其自身的右作用.

令 G^* 为群运算 $*$ 定义为 $x*y=yx$ 的群 G，那么 G 和 G^* 反同构，且 G 的右作用是 G^* 的左作用. 因此所有关于左作用的命题适用于右作用.

习题

23. 令 φ 为 G 在 X 的传递作用，那么 φ 是开作用当且仅当对于某个 $p\in X$ 和在 e 点的 G 的某个拓扑基 $\mathfrak{U}$ 对于每个 $U\in\mathfrak{U}$ 我们有 p 在 $\varphi_p[U]$的内部.

24. 令 φ 为 G 在 X 上的作用且 $p\in X$，G 在 p 的迷向子群定义为 $H_p=\{g\in G: gp=p\}$.

  a. 证明迷向子群事实上是子群且它是闭的.

  b. 令 E 为 G 的子集，那么

$$\varphi_p^{-1}[\varphi_p[E]] = E\cdot H_p.$$

  c. 若 q 是 X 的另一点且 $q=gp$，则在 q 的迷向子群是 $H_q=g[H_p]g^{-1}$.

25. 证明命题18.

14.6 不变测度的惟一性

本节的目标是要表明在许多重要情形下，在相差一个正常数因子的意义下，不变贝尔测度惟一存在. 在14.1节的一般框架中给出惟一性结果会使我们离得太远，但我们将证明局部紧群上的左不变贝尔测度和右不变贝尔测度是惟一的，尽管它们可以互不相同. 我们也处理适当地作用于局部紧空间的局部紧群的情形. 在这些情形中我们可以导出满足给定的正则条件的不变博雷尔测度的惟一性.

令 μ 与 v 为局部紧豪斯多夫空间 X 上的贝尔测度，对于每个 $\varphi\in C_c(X)$满足

378

$$\int_X\varphi\mathrm{d}\mu = \int_X\varphi\mathrm{d}v,$$

那么

$$\mu E = vE$$

对于所有 σ 有界贝尔集 E 成立. 若 λ 是局部紧空间 Y 上的贝尔测度，则 $X\times Y$ 的所有贝尔子集关于乘积测度 $\mu\times\lambda$ 可测. 因此 $C_c(X\times Y)$内的每个函数 φ 关于 $X\times Y$ 可积. 我们将主要关心 $G\times G$ 的情形，其中 G 是局部紧群. 若 φ 和 $\psi\in C_c(G)$，则函数 $h(x, y)=\varphi(x)\psi(xy^{-1})$属于 $C_c(G\times G)$且因此关于 $\mu\times\lambda$ 可积.

令 G 为紧群，且令 μ 为 G 上的左不变哈尔测度，令 v 为 G 上的右不变哈尔测度，我们要求 $\mu G=vG=1$ 以规范化它们. 若 φ 是 G 上的任意连续实值函数，我们有

$$\begin{aligned}\int_G\varphi(x)\mathrm{d}\mu(x) &= \int_G\varphi(yx)\mathrm{d}\mu(x)\\ &= \int_G\left[\int_G\varphi(yx)\mathrm{d}\mu(x)\right]\mathrm{d}v(y)\\ &= \int_G\left[\int_G\varphi(yx)\mathrm{d}v(y)\right]\mathrm{d}\mu(x)\\ &= \int_G\left[\int_G\varphi(y)\mathrm{d}v(y)\right]\mathrm{d}\mu(x)\\ &= \int_G\varphi(y)\mathrm{d}v(y).\end{aligned}$$

这里我们用到了 μ 的左不变性，并将富比尼定理运用于 $\varphi(yx)$，且用到 v 的右不变性.

由于

$$\int\varphi\mathrm{d}\mu = \int\varphi\mathrm{d}v$$

对于每个函数 $\varphi\in C\ (G)$成立，我们有 $\mu=v$. 因此每个规范化的左不变贝尔测度等于每个规范

化的右不变贝尔测度. 因此，G 上的任意两个规范化的左不变贝尔测度必须相等，两个右不变

379 贝尔测度也如此. 我们已经建立了下面定理：

19. 定理　令 G 为紧群，那么惟一存在左不变贝尔测度 μ 满足 $\mu G=1$，它也是满足 $\mu G=1$ 的惟一的右不变贝尔测度.

若紧空间的博雷尔测度是内正则的，则它是正则的且在紧 G_δ 上确定它的值. 这给出下面的系：

20. 系　令 G 为紧群，那么惟一存在左不变正则博雷尔测度 μ 满足 $\mu G=1$，它也是惟一的满足 $\mu G=1$ 的正则右不变贝尔测度.

在对紧群 G 证明惟一性的过程中，G 的紧性被用来保证 $\varphi(yx)$ 在 $G\times G$ 上的可积性. 在局部紧情形下惟一性的证明更为微妙.

令 v 为 G 上非零的右不变贝尔测度，ψ 是 $C_c(G)$ 内的固定的非负函数. 将 ψ 乘以一个适当的正常数，我们可以假定

$$\int\psi(y^{-1})\mathrm{d}v(y)=1.$$

定义 G 上的实值函数 Δ 如下：

$$\Delta(x)=\int\psi(y^{-1}x)\mathrm{d}v(y). \tag{1}$$

那么根据命题 16，Δ 是连续的. 由于 v 在每个开集上是正的且 $\psi(y^{-1}x)$ 在 y 的某个开集上是正的，因此函数 $\Delta(x)$ 是正的. 我们注意到 $\Delta(e)=\int\psi(y^{-1})\mathrm{d}v(y)=1$. 令 $\Gamma(x)=[\Delta(x)]^{-1}$.

令 μ 为任意非零的左不变贝尔测度，将它乘上一个适当的正常数，可以假定 μ 是规范的从而 $\int\psi(x)\mathrm{d}\mu(x)=1$. 对于任意的 $\varphi\in C_c(G)$ 我们有

$$\begin{aligned}\int\varphi(x)\mathrm{d}\mu(x)&=\int\varphi(x)\Gamma(x)\Delta(x)\mathrm{d}\mu(x)\\&=\int\left[\int\varphi(x)\Gamma(x)\psi(y^{-1}x)\mathrm{d}v(y)\right]\mathrm{d}\mu(x)\\&=\int\left[\int\varphi(x)\Gamma(x)\psi(y^{-1}x)\mathrm{d}\mu(x)\right]\mathrm{d}v(y),\end{aligned}$$

380

这里我们用到了富比尼定理，它是适用的，因为连续函数 $\varphi(x)\Gamma(x)\psi(y^{-1}x)$ 在 $G\times G$ 内有紧支撑. 根据 μ 的左不变性我们有

$$\int\varphi(x)\Gamma(x)\psi(y^{-1}x)\mathrm{d}\mu(x)=\int\varphi(yx)\Gamma(yx)\psi(x)\mathrm{d}\mu(x).$$

因此根据富比尼定理

$$\begin{aligned}\int\varphi(x)\mathrm{d}\mu(x)&=\int\left[\int\varphi(yx)\Gamma(yx)\psi(x)\mathrm{d}\mu(x)\right]\mathrm{d}v(y)\\&=\int\left[\int\varphi(yx)\Gamma(yx)\mathrm{d}v(y)\right]\psi(x)\mathrm{d}\mu(x),\end{aligned}$$

测度 v 的右不变性蕴涵着

$$\int\varphi(yx)\Gamma(yx)\mathrm{d}v(y)=\int\varphi(y)\Gamma(y)\mathrm{d}v(y).$$

因此

$$\int\varphi(x)\mathrm{d}\mu(x)=\int\varphi(y)\Gamma(y)\mathrm{d}v(y)\cdot\int\psi(x)\mathrm{d}\mu(x)$$
$$=\int\varphi(y)\Gamma(y)\mathrm{d}v(y).$$

这对于所有 $\varphi\in C_c(G)$成立，因而 $\mathrm{d}\mu=\Gamma\mathrm{d}v$，即 μ 关于 v 绝对连续，且它的拉东-尼科迪姆导数是 Γ. 由于 Γ 的定义与 μ 无关，因而任意两个规范的左不变贝尔测度必须相等. 交换左和右(或运用该结果于群 G^*)重复上面的证明，我们看到在相差一个常数因子的意义下任何两个右不变贝尔测度是相等的，因此有下面的定理：

21. 定理 *任何两个局部紧群的左不变贝尔测度除相差一个常数因子外相同. 类似地，任何两个局部紧群的右不变贝尔测度除相差一个常数因子外相同.*

根据正则性我们有下面的系：

22. 系 *任何两个局部紧群上的左不变内正则博雷尔测度除相差一个常数因子外是相同的，且类似的结论对右不变测度成立.*

381

我们也有拟正则左不变博雷尔测度的存在性与惟一性. 然而，我们注意到，当 G 不是 σ 紧的时候，内正则博雷尔测度与拟正则不变博雷尔测度一般不同. 以下是一个典型例子.

令 X 为集合 $\mathbf{R}^2$ 具有如下拓扑：一个集合是开的当且仅当它与 $\mathbf{R}^2$ 的每条水平直线的交是开的. 于是 X 是 $\mathbf{R}^2$的水平直线的直接并集，每条水平直线具有通常的拓扑. 因此 X 是局部紧. 若我们定义加法为通常的 $\mathbf{R}^2$上的向量加法，则它成为一个交换群. 集合 $E\subset X$ 是博雷尔集当且仅当它与每个直线的交是博雷尔集. 它是 σ 有界当且仅当它仅与可数条水平直线相交. 由于 X 是一个交换群，所以左不变和右不变是等同的. 定义在博雷尔集 E 上的内正则不变博雷尔测度 $\underline{\mu}$ 为

$$\underline{\mu}E=\sum_a m(E\cap L_a),$$

其中 L_a是水平线$\{\langle x,\ y\rangle:\ y=a\}$，且 m 是 $\mathbf{R}$ 上的勒贝格测度. 若 E 与不可数的水平直线相交，则拟正则不变博雷尔测度 $\bar{\mu}$ 定义为

$$\bar{\mu}E=\infty$$

在其他地方定义为 $\bar{\mu}E=\underline{\mu}E$. $\bar{\mu}$ 和$\underline{\mu}$ 的主要差别在于它们对于那些与不可数水平直线相交但与每条直线的交集是勒贝格测度为零的集合的处理. 若 E 是这样的集合，则$\underline{\mu}E=0$ 且 $\bar{\mu}E=\infty$.

(1) 定义的函数 Δ 称为G 的模函数. 初看起来 Δ 与 ψ 和 v 的选择无关. 由于每个左不变博雷尔测度具有形式 $\mathrm{d}\mu=c\Gamma\mathrm{d}v$，其中 $\Gamma=\Delta^{-1}$. 我们看到不同的 ψ 的选择得到的 Δ 仅相差一个常数因子. 由于 $\Delta(e)=1$，所以它们必须给出相同的 Δ. 若运用右不变贝尔测度的惟一性，我们看到每个右不变的贝尔测度 v 必须具有形式 $\mathrm{d}v=c\Delta\mathrm{d}\mu$. 由于 $\Delta(e)=1$，因此 Δ 必须与 v 的选择无关. 若 ψ_1 是属于 $C_c(G)$的另一个非负函数，则

382

$$\int\psi_1(y^{-1}x)\mathrm{d}v(y)=\Delta(x)\cdot\int\psi_1(y^{-1})\mathrm{d}v(y).$$

从这里可得出，若 f 是任意 v 可积函数，则

$$\int f(y^{-1}x)\mathrm{d}v(y) = \Delta(x)\int f(y^{-1})\mathrm{d}v(y).$$

我们用以下命题叙述关于 Δ 的事实：

23. 命题 *存在一个 G 上的满足 $\Delta(xy)=\Delta(x)\Delta(y)$ 的正连续函数 Δ 使得每个左不变贝尔测度 μ 与每个右不变测度 v 用 $\mathrm{d}v=c\Delta\mathrm{d}\mu$ 相联系，c 是某个正常数．若 f 是任何关于 v 可积的函数，我们有*

i. $\int f(y^{-1}x)\mathrm{d}v(y) = \Delta(x)\int f(y^{-1})\mathrm{d}v(y).$

ii. $\int f(xy)\mathrm{d}v(y) = \Delta(x^{-1})\int f(y)\mathrm{d}v(y).$

若 f 关于 μ 可积，我们有

iii. $\int f(xy)\mathrm{d}\mu(x) = \Delta(y)\int f(x)\mathrm{d}\mu(x).$

iv. $\int f(yx^{-1})\mathrm{d}\mu(x) = \Delta(y^{-1})\int f(x^{-1})\mathrm{d}\mu(x).$

我们观察到当且仅当对所有 $x\in G$，$\Delta(x)=1$，G 上存在双边不变贝尔测度．具有这个性质的群称为是幺模群．因此所有紧群和所有交换群是幺模的，所有可逆 $n\times n$ 矩阵构成的群也是幺模的(见习题 33)．在习题 32 中我们给出了局部紧群的例子，其上的左不变测度和右不变测度是不同的．

不变测度的存在性和惟一性的交互作用有时可用来导出不变测度的附加性质．作为一个例子，我们建立以下命题：

383

24. 命题 *$\mathbf{R}^n$ 上的勒贝格测度在 $\mathbf{R}^n$ 上的刚体运动群是不变的．*

证明 勒贝格测度平移不变，即在局部紧交换群 T 上不变．T 为当我们取群运算为向量加法时 $\mathbf{R}^n$ 形成的群．根据定理 21，勒贝格测度是这个群上仅有的不变贝尔测度；即 $\mathbf{R}^n$ 上的任何平移不变的贝尔测度必须是常数乘以勒贝格测度后所得到的测度．

$\mathbf{R}^n$ 上的刚体运动群是一个等距的传递群，因而等度连续．根据定理 6，存在 $\mathbf{R}^n$ 上的一个贝尔测度 μ，其在刚体运动群下是不变的．由于 μ 在平移群下不变，所以它必须是一个常数乘以勒贝格测度后所得到的测度．因此，勒贝格测度在所有刚体运动群下是不变的．■

关于惟一性的研究以下命题是我们的结论：

25. 定理 *令 G 为传递且适当地作用于一个局部紧豪斯多夫空间 X 的局部紧群，那么 X 上惟一存在在 G 作用下不变的贝尔测度．*

证明 令 p 为 X 的点，我们取它做基点，令 λ 为 G 上的左不变贝尔测度．令 π：$G\to X$ 为将 g 映射到 gp 的映射，那么 π 是一个适当映射．

由于在紧集在适当映射下的逆像是紧的且一个 G_δ 在任何连续映射下的逆像是一个 G_δ，因此只要 E 是 σ 有界贝尔集，$\pi^{-1}[E]$就是 σ 有界贝尔集．由此我们可以定义一个 X 上的贝尔测度 μ 如下：

$$\mu E = \lambda(\pi^{-1}[E]). \tag{2}$$

由于 $\pi^{-1}[gE]=g\pi^{-1}[E]$且 λ 是左不变的，因此 μ 在 G 下不变.

我们接着证明对于某个 G 上的左不变贝尔测度 λ 每个 X 上的 G 不变贝尔测度 μ 是由(2)给出的. 令

$$K=\{k\in G:k(p)=p\}=\pi^{-1}[p].$$

384

由于 π 是适当的，因此 K 是 G 的紧子群. 令 v 为 K 上的不变贝尔测度且 φ 是 $C_c(G)$内的函数，定义

$$\psi(g)=\int_K\varphi(gk)\mathrm{d}v(k).$$

对于 $h\in K$ 我们有

$$\begin{aligned}\psi(gh)&=\int_K\varphi(ghk)\mathrm{d}v(k)\\&=\int_K\varphi(gk)\mathrm{d}v(k)\\&=\psi(g).\end{aligned}$$

若 $gp=x$ 且 $g_1p=x$，则 $g_1=gh$，这里 $h\in K$. 因此 $gp=g_1p$ 蕴涵 $\psi(g)=\psi(g_1)$.

若只要 $gp=x$ 我们设 $\psi^*(x)=\psi(g)$，则 $\psi^*(x)$是一个不依赖于那些满足 $gp=x$ 的 g 的选择的良定义. 不难证明 supp ψ^* 是 $\pi[\operatorname{supp}\psi]$，其包含于 $\pi[(\operatorname{supp}\psi)\cdot K]$. 由于两个紧集的乘积是紧的且 π 将紧集映到紧集，我们必须有 suppψ^* 为紧. 对于每个 $\varphi\in C_c(G)$定义

$$I(\varphi)=\int\psi^*(x)\mathrm{d}\mu(x)$$

那么 I 是一个 $C_c(G)$上的正线性泛函，且惟一存在 G 上的贝尔测度 λ 使得

$$I(\varphi)=\int_G\varphi\mathrm{d}\lambda.$$

对于 $f\in G$ 令 $\varphi_f(g)=\varphi(fg)$，那么

$$\begin{aligned}\psi_f(g)&=\int_K\varphi_f(gk)\mathrm{d}v(k)\\&=\int_K\varphi(fgk)\mathrm{d}v(k)\\&=\psi(fg).\end{aligned}$$

从这里我们看到

$$\psi_f^*(x)=\psi^*(fx).$$

385

因此

$$\begin{aligned}I(\varphi_f)&=\int\psi_f^*(x)\mathrm{d}\mu(x)\\&=\int\psi^*(fx)\mathrm{d}\mu(x)\\&=\int\psi^*(x)\mathrm{d}\mu(x)\\&=I(\varphi).\end{aligned}$$

相应地，

$$\int \varphi(fg)\mathrm{d}\lambda(g) = \int \varphi(g)\mathrm{d}\lambda(g),$$

因而λ是G上的左不变贝尔测度. 若φ^*是$C_c(X)$中的任意函数，令φ为如下定义的G上的函数：

$$\varphi(g) = \varphi^*(gp).$$

那么

$$I(\varphi) = \int \varphi^*(x)\mathrm{d}\mu(x).$$

这蕴涵着

$$\mu E = \lambda(\pi^{-1}[E]).$$

由于在相差一个常数因子的意义下，λ是惟一的，因此在相差一个常数因子的意义下，不变贝尔测度μ必须也是惟一的. ■

习题

26. 令G是局部紧群且φ，ψ为属于$C_c(G)$的函数.
    a. 令S和T为$G\times G$到其自身的映射，$S(\langle x, y\rangle)=\langle x, yx\rangle$，$T(\langle x, y\rangle)=\langle x, xy^{-1}\rangle$. 证明$S$和$T$是$G\times G$到其自身的同胚映射.
    b. 函数$\varphi(x)$，$\psi(yx)$和$\psi(xy^{-1})$都是$G\times G$上的连续函数.
    c. 函数$\varphi(x)\psi(xy^{-1})$在$G\times G$上具有紧支撑. 根据φ和ψ的支撑描述它的支撑.

386

27. 证明命题 23. [提示：为从(i)导出(ii)，用定义为$f^*(z)=f(z^{-1})$的f^*代替f. 为证明(iii)，用Δ的可乘性写下

$$\int f(xy)\mathrm{d}\mu(x) = \Delta(y)\int f(xy)\Delta[(xy)^{-1}]\Delta(x)\mathrm{d}\mu(x),$$

    用测度$\Delta(x)\mathrm{d}\mu(x)$的右不变性.]
28. a. 证明定理 25 的证明中用到的函数ψ^*是X上的连续函数. [提示：首先证明函数ψ是一个G上的连续函数.]
    b. 证明$I(\varphi)=\int \varphi^*(x)\mathrm{d}\mu(x)$蕴涵$\mu E=\lambda(\pi^{-1}[E])$.
29. 证明一个群幺模当且仅当它关于左不变测度可积是关于右不变测度可积. [提示：这个条件蕴涵Δ有界.]
30. 令G为局部紧度量群，即其基本拓扑空间是局部紧度量空间. 若

$$\rho(gx, gy) = \rho(x, y) = \rho(xg, yg)$$

    对于所有x，y，$g\in G$成立，则我们称G的度量ρ为双边不变度量. 证明若一个局部紧度量群G有双边不变度量，则它是幺模的. [提示：G上的等距群等度连续.]
31. 令G为$\mathbf{R}^3$中所有适当旋转组成的群$SO(3)$，或等价地，所有具有行列式等 1 的 3×3 正交矩阵.
    a. 令R_φ表示以角度φ绕正z轴的旋转，S_θ表示以角度θ绕正y轴的旋转. 证明每个$O\in G$可表示为以下乘积

$$O = R_\varphi S_\theta R_\psi,$$

其中 $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$，$0\leqslant\theta\leqslant\pi$，且 $0\leqslant\psi<2\pi$.

b. 证明该表示是惟一的，除非 $\theta=0$ 或 $\theta=\pi$，即除非 O 是关于 z 轴的旋转或在 y 轴反射后关于 z 轴的旋转.

c. 令 H 为关于 z 轴的旋转子群. 证明 $X=G/H$ 到 $\mathbf{R}^3$ 的单位球面是自然同胚的，它将群元素 $R_\varphi S_\theta R_\psi$ 映为球坐标为 $(1, \theta, \varphi)$ 的点.

d. 用几何意义描述 G 在 X 的作用并导出 X 上的 G 不变测度是由下式给出的球面面积： [387]

$$\mu E = \int_E \sin\theta \, d\theta \, d\varphi.$$

e. 用定理 25 证明 G 上的不变测度 λ 由

$$\lambda E = \int_E \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \, d\psi$$

给出.

14.7 群的微分同胚

本节我们考虑当 X 是微分流形且 G 是微分同胚的传递群的情形时不变测度的存在性和性质. 若 G 自身有可微流形结构使得映射 $\langle x, y\rangle\to xy$ 和 $x\to x^{-1}$ 是 $G\times G$ 和 G 上的可微映射，我们说 G 是一个*李群*. 李群的例子由 $n\times n$ 实或复可逆矩阵的满足某些代数条件的那些子群给出：例如，所有可逆矩阵群，行列式等 1 的矩阵群，正交矩阵群，等等.

历史上，1897 年 A. Hurwitz[19]首先对于李群引入不变积分. 任意局部紧可分度量群上的不变测度的存在性首先由 A. Haar[18]于 1933 年给出，A. Weil[27]1940 年把它推广到一般局部紧群. 14.3 节给出的对不变测度的处理是在 S. Banach([13]，附录Ⅱ)对可分度量空间优美处理的激励下做出的.

虽然胡尔维茨的方法仅适用于微分同胚群的情形，但它是最简单的方法且有对不变测度导出明确的公式的优点.

令 X 为可微流形且 μ 是 X 上的贝尔测度. 若对于每个具有可微坐标为 $x_1, \cdots, x_n$ 的坐标图 U 存在正连续函数 $\Phi_U(x)$ 使得对于每个可测的 $E\subset U$ 有

$$\mu E = \int_E \Phi_U(x) \, dx_1 \, dx_2 \cdots dx_n, \tag{3}$$ [388]

我们说 μ 是*可微测度*或*光滑测度*. 其中用 $dx_1\cdots dx_n$ 表示 n 维勒贝格测度. 若 U 与具有坐标为 $y_1, \cdots, y_n$ 的坐标图 V 重叠，则在 $U\cap V$ 中必须有

$$\Phi_V(y)\left|\frac{\partial y}{\partial x}\right| = \Phi_U(x)$$

其中写

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \det\left[\frac{\partial y_i}{\partial x_k}\right].$$

这里常常称赋予坐标图的函数 Φ_U 为一个体积元.

现在假定 G 是 X 上的微分同胚传递群. 令 U 和 V 为满足对于某个 $g\in G$，$g[U]\subset V$ 的坐

标邻域．为使我们的体积形式给出集合 $E\subset U$ 上的一个不变测度，必须有

$$\Phi_V(gx)\left|\frac{\partial g}{\partial x}\right| = \Phi_U(x). \tag{4}$$

若固定 U 中的基点 p 且将其乘上一个适当的常数使得 $\Phi(p)=1$，则为使(4)成立在 $q=gp$ 的任何不变体积形式必须如下给出

$$\Phi_V(q) = \Phi_V(gp) = \left|\frac{\partial g}{\partial x}\right|^{-1} \tag{5}$$

这表明若不变体积形式存在，则它是惟一的．公式(5)可用于定义一个不变体积形式在 q 点的值，假定不管用哪个满足 $gp=q$ 的 $g\in G$，我们都得到同一个 $\Phi_V(q)$的值．因此我们得到$\Phi_V(q)$的良定义的值当且仅当

$$\left|\frac{\partial g}{\partial x}\right| = \left|\frac{\partial h}{\partial x}\right| \tag{6}$$

对于任何两个满足 $q=gp$ 且 $q=hp$ 的元素 g，$h\in G$ 成立．但 g 和 h 将 p 映射到相同的点当且仅当 $h^{-1}gp=p$，即若 $h^{-1}g=k$ 是 p 的迷向子群的一个元素．根据链式法则

389

$$\left|\frac{\partial k}{\partial x}\right| = \left|\frac{\partial h}{\partial x}\right|^{-1}\left|\frac{\partial g}{\partial x}\right|.$$

因此(6)对于所有满足 $gp=hp$ 的 g，h 成立当且仅当对于所有满足 $kp=p$ 的 $k\in G$，$|\partial k/\partial x|=1$．这给出以下定理：

26. 定理　令 G 为可微流形 X 上的微分同胚的传递群且 $p\in X$，那么存在一个在 G 下不变的可微测度当且仅当在 p 点

$$\left|\frac{\partial k}{\partial x}\right| = 1$$

对于每个满足 $kp=p$ 的元素 $k\in G$ 成立．在这种情形下，除去一个常数因子外该测度惟一，且它由(5)给出．

为看到其实际上如何实现，我们取 X 为右半平面$\{\langle x_1, x_2\rangle\in\mathbf{R}^2: x_1>0\}$且取 G 为形如

$$g = \begin{bmatrix} u & v \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

的矩阵群，其中 $u>0$，且 gx 如下给出：

$$\begin{bmatrix} u & v \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

那么 G 是简单传递的；即给定 x 和 y 存在惟一的 g 使得 $gx=y$．令 $p=\langle 1, 0\rangle$且取体积形式为 $\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2$．若

$$gx = \begin{bmatrix} u & v \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},$$

则

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \det\begin{bmatrix} u & v \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = u.$$

当 $gp=y$，我们有$\langle u, v\rangle=\langle y_1, y_2\rangle$．因此

$$\Phi(y)=\left|\frac{\partial g}{\partial x}\right|^{-1}=y_1^{-1},$$

且 X 上的不变测度为

$$\mu E=\int_E y_1^{-1}\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2.$$

390

习题

32. 令 G 为形如

$$\begin{bmatrix}u & v\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

的 2×2 矩阵群，其中 $u>0$ 且 G 具有将 G 考虑为右半 u，v 平面的拓扑.

a. 通过设 $gx=ux+v$ 令 G 可微地作用于 $\mathbf{R}^1$. G 在 $x=1$ 的迷向群是什么？用定理 26 导出在 G 的这个作用下不存在 $\mathbf{R}^1$ 上的不变可微测度.

b. 证明 G 上的左不变测度为

$$\mu E=\int_E u^{-1}\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

c. 证明 G 上的右不变测度为

$$\mu E=\int_E u^{-2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

d. G 上的模函数 Δ 是什么？

33. 令 G 为所有 $n\times n$ 可逆实矩阵$[x_{ij}]$群. 证明 G 是幺模的且它的不变测度为

$$\mu E=\int_E|\det[x]|^{-n}\mathrm{d}x_{11}\mathrm{d}x_{12}\cdots\mathrm{d}x_{nn}.$$

34. 令 G 为 X 到其自身的微分同胚群且 H 为 G 在点 $p\in X$ 的迷向子群.

a. 证明映射 $h\to|\partial h/\partial x|_p$ 是从 H 到正实数的同态.

b. 证明若这个同态有界，则对所有 $h\in H$，$|\partial h/\partial x|=1$.

c. 若迷向子群 H 在 p 是紧的，则存在在 G 下的不变微分度量.

35. 给出一个 $\mathbf{R}^2$ 上的不拓扑等度连续但具有非零不变可微度量的微分同胚的传递群的例子.

391

第15章 测度空间的映射

15.1 点映射与集映射

令 X 和 Y 为任意两个空间，φ 是将 X 映入 Y 的映射. 与 φ 相伴随的是从与 Y 相伴随的对象到与 X 相伴随的相应对象的几个映射. 例如，定义为 $\Phi(E)=\varphi^{-1}[E]$ 的集映射 Φ 是从 Y 的子集到 X 的子集的映射. 该映射保持并、交和补，它称为由 φ 诱导或伴随的集映射，我们将 φ 称为点映射. 若 $\langle X, \mathfrak{A}\rangle$ 和 $\langle Y, \mathcal{B}\rangle$ 是可测空间，则对于从 X 到 Y 的点映射 φ，若对于每个 $E\in\mathcal{B}$ 有 $\varphi^{-1}[E]\in\mathfrak{A}$ 成立，我们称它为**可测的**. 因此 φ 是可测的当且仅当 Φ 将 $\mathcal{B}$ 映入 $\mathfrak{A}$.

若 f 是 $\langle X, \mathfrak{A}\rangle$ 上的实值函数，则 f 是将 X 映入 $\mathbf{R}$ 的映射，且 f 关于 $\mathfrak{A}$ 可测当且仅当 f 是将 $\langle X, \mathfrak{A}\rangle$ 映入 $\langle \mathbf{R}, \mathcal{B}\rangle$ 的可测映射，其中 $\mathcal{B}$ 是博雷尔集的 σ 代数. 一个实变量的实值函数是勒贝格可测的当且仅当它是将 $\langle \mathbf{R}, \mathfrak{M}\rangle$ 映入 $\langle \mathbf{R}, \mathcal{B}\rangle$ 的可测映射，其中 $\mathfrak{M}$ 是勒贝格可测集类；它是博雷尔可测的当且仅当它是 $\langle \mathbf{R}, \mathcal{B}\rangle$ 映入 $\langle \mathbf{R}, \mathcal{B}\rangle$ 的可测映射.

与 φ 相伴随的是从 Y 上的实值函数空间到 X 上的实值函数空间的映射 $\varphi^*(f)=f\circ\varphi$. 这个映射 φ^* 常常称为 φ 的伴随映射，且它保持和、积、最大值，等等. 若 φ 是可测的，则 φ^* 将可测函数映入可测函数.

392

令 $\mathfrak{A}$ 为 X 的子集的代数且 $\mathcal{B}$ 为 Y 的子集的代数. 那么使得 $\Phi(Y)=X$，$\Phi(\widetilde{E})=\sim\Phi(E)$ 及 $\Phi(A\cup B)=\Phi(A)\cup\Phi(B)$ 的 $\mathcal{B}$ 到 $\mathfrak{A}$ 的映射 Φ 称为一个(格)**同态映射**. 若 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 是 σ 代数且 Φ 具有性质

$$\Phi\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\Big)=\bigcup_{i=1}^{\infty}\Phi(E_i),$$

那么 Φ 称为一个 **σ 同态映射**. 每个由 X 到 Y 的点映射诱导的集映射是 σ 同态映射. 但我们有不是由任何点映射诱导的 σ 同态映射(习题 2).

令 $\langle X, \mathfrak{A}\rangle$ 和 $\langle Y, \mathcal{B}\rangle$ 是可测空间且 Φ 是从 $\mathcal{B}$ 到 $\mathfrak{A}$ 的 σ 同态映射，那么 Φ 诱导了从 $\langle X, \mathfrak{A}\rangle$ 上的测度到 $\langle Y, \mathcal{B}\rangle$ 上的测度的映射 Φ^*，若我们定义 $\Phi^*\mu$ 为 $(\Phi^*\mu)(E)=\mu(\Phi(E))$. 以下命题可认为是换元公式.

1. 命题 令 φ 为测度空间 $\langle X, \mathfrak{A}, \mu\rangle$ 到可测空间 $\langle Y, \mathcal{B}\rangle$ 的可测点映射，令 Φ 为被诱导的 $\mathcal{B}$ 到 $\mathfrak{A}$ 的集映射. 那么对于每个 Y 上的非负可测函数 f，我们有

$$\int_Y f\,\mathrm{d}\Phi^*\mu=\int_X(f\circ\varphi)\,\mathrm{d}\mu.$$

证明 若 f 是特征函数，该命题显然成立. 从这里可以得出若 f 是简单函数，该命题显然成立. 由于 $\int f$ 是所有小于 f 的非负简单函数积分的上确界，所以命题成立. ∎

习题

1. 令 $\mathcal{B}$ 为 Y 的包含 Y、$\varnothing$ 及每个仅由单个元素组成的集 $\{y\}$ 的子集族，那么每个 $\mathcal{B}$ 到 X 的子集的映射 Φ，其保持有限交、任意并且 $\Phi(Y)=X$ 且 $\Phi(\varnothing)=\varnothing$，是由点映射诱导的映射. [集

合 $E_y=\Phi(\{y\})$不相交且它们的并集为 X. 对属于 E_y的 x 令 $\varphi(x)=y$.]

2. 令 $X=Y=[0,1]$，且令$\mathfrak{A}$是$[0,1]$的或者是可数集或者是可数集的补集的所有子集组成的集簇，那么$\mathfrak{A}$是σ代数. 令$\mathcal{B}=\{Y,\varnothing\}$. 对于 $E\in\mathfrak{A}$，若 E 为可数集定义 $\Phi(E)=\varnothing$，若 E 为可数集的补集定义 $\Phi(E)=Y$，那么 Φ 不是由任何 Y 到 X 的点映射诱导出来的σ 同态映射. [393]
3. 证明伴随映射 φ^* 可被延拓为将 Y 上的扩充的实值函数映射到 X 上的扩充的实值函数空间. 将命题 1 推广到这种情形.
4. 令$\langle X,\mathfrak{A}\rangle$，$\langle Y,\mathcal{B}\rangle$和$\langle Z,\mathcal{C}\rangle$是测度空间且 φ：$X\to Y$ 和 ψ：$Y\to Z$ 是可测映射. 证明 $\psi\circ\varphi$ 是$\langle X,\mathfrak{A}\rangle$到$\langle Z,\mathcal{C}\rangle$的可测映射. 这与若 f 是勒贝格可测且 g 为博雷尔可测实值函数，则 $g\circ f$ 勒贝格可测但 $f\circ g$ 不必勒贝格可测这一事实有何关系？
5. 证明 $\Phi^*\mu$ 是一个测度.
6. a. 令 φ 为$\langle X,\mathfrak{A},\mu\rangle$到$\langle Y,\mathcal{B},v\rangle$的可测点映射，$\Phi$ 是$\mathcal{B}$映入$\mathfrak{A}$的被诱导的集映射. 假设 $\Phi^*\mu$ 关于 v 绝对连续且 v 是有限(或σ有限)测度. 定义$[\mathrm{d}\mu/\mathrm{d}v]$为 $\Phi^*\mu$ 关于 v 的拉东-尼柯迪姆导数，那么对于每个 Y 上的非负可测函数 f 我们有
$$\int_X(f\circ\varphi)\,\mathrm{d}\mu=\int_Y f\left[\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}v}\right]\mathrm{d}v.$$
   b. 令 f 为$[0,1]$上的非负可测函数，g 是$[0,1]$上的单调绝对连续函数满足 $g(0)=0$，$g(1)=1$，那么
$$\int_0^1 f[g(t)]g'(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t.$$
7. a. 令$\langle X,\mathfrak{A}\rangle$和$\langle Y,\mathcal{B}\rangle$为可测空间，$\Phi$ 是从$\mathcal{B}$到$\mathfrak{A}$的σ 同态映射. 证明存在 Y 上的可测实值函数到 X 上的可测实值函数的惟一线性映射 T_Φ，其将非负函数映入非负函数，使得对特征函数 χ_E我们有
$$T_\Phi(\chi_E)=\chi_{\Phi(E)}.$$
   b. 令 μ 为$\langle X,\mathfrak{A}\rangle$上的测度，$f$ 是 Y 上的非负可测函数，那么
$$\int_X T_\Phi(f)\,\mathrm{d}\mu=\int_Y f\,\mathrm{d}\Phi^*(\mu).$$

15.2　布尔 σ 代数

一个布尔代数是一个元素集，其上定义了两个二元运算“∨”与“∧”以及单元运算“′”，这些运算满足以下规则： [394]

i. $A\vee A=A$.

i′. $A\wedge A=A$.

ii. $A\vee B=B\vee A$.

ii′. $A\wedge B=B\wedge A$.

iii. $(A\vee B)\vee C=A\vee(B\vee C)$.

iii′. $(A\wedge B)\wedge C=A\wedge(B\wedge C)$.

iv. $A\vee(B\wedge C)=(A\vee B)\wedge(A\vee C)$.

iv′. $A\wedge(B\vee C)=(A\wedge B)\vee(A\wedge C)$.

v. $(A\wedge B)'=A'\vee B'$.

vi. $(A')'=A$.

vii. $\exists 0$ 使得 $A\wedge 0=0$ 且 $A\vee 0=A$.

viii. $A'\wedge A=0$.

布尔代数的一个例子是某个集合 X 的子集的代数$\mathfrak{A}$，其中$\vee$，$\wedge$，$'$解释为$\cup$，$\cap$，$\sim$. 我们有时称$\vee$，$\wedge$，$'$为“并”，“交”与“补”.

一个布尔代数$\mathfrak{A}$成为偏序，若我们定义 $A\leqslant B$ 为 $A\wedge B=A$. 那么 0 是最小元，而 $X=0'$是最大元. 此外，$A\vee B$ 是$\mathfrak{A}$内的比 A 和 B 都大的最小元.

一个布尔代数$\mathfrak{A}$称为布尔σ代数，若对于每个$\mathfrak{A}$的元素的序列$\langle A_n\rangle$存在一个最小元素 B 使得 $A_n\leqslant B$ 对于所有 n 成立. 这个元素 B 记为 $\bigvee_{n=1}^{\infty}A_n$. 在一个布尔代数中，元素 $C=(\bigvee_{n=1}^{\infty}A_n')'$ 是使得 $C\leqslant A_n$ 对于所有 n 成立的最大元素，写作 $C=\bigwedge_{n=1}^{\infty}A_n$. 布尔$\sigma$代数的一个例子是集合 X 的子集的σ代数. 另一个例子是：令$\langle X,\ \mathfrak{A},\ \mu\rangle$为测度空间且$\mathfrak{N}$是零测度集族. $\mathfrak{A}$中的两个集合称为模$\mathfrak{N}$等价，若它们的对称差属于$\mathfrak{N}$. 等价集的有限或可数并集与交集等价，因而等价集类构成一个布尔σ代数. 我们将它记为$\mathfrak{A}/\mathfrak{N}$.

每个布尔代数同构于适当空间 X 的子集的代数，但并非每个布尔σ代数同构于某个空间的子集的σ代数. 我们遇到的最多的情形是最后一个例子，这里布尔σ代数是$\mathfrak{A}/\mathfrak{N}$. 事实上，我们需要的$\mathfrak{N}$的仅有的性质是(i)若 $A\in\mathfrak{A}$且 $B\in\mathfrak{A}$，其中 $B\subseteq A$，则 $B\in\mathfrak{N}$；(ii)若 $A_n\in\mathfrak{N}$，则 $\bigvee_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathfrak{N}$. 具有这些性质的布尔$\sigma$代数$\mathfrak{A}$的子集称为**$\sigma$理想**，且我们可以定义$\mathfrak{A}$模$\mathfrak{N}$的等价类的布尔$\sigma$代数$\mathfrak{A}/\mathfrak{N}$.

[395]

一个由集合 X，X 的子集的σ代数$\mathfrak{A}$以及$\mathfrak{A}$的σ理想$\mathfrak{N}$组成的三元组$(X,\ \mathfrak{A},\ \mathfrak{N})$称为具有零集的可测空间. 那么$\mathfrak{A}/\mathfrak{N}$给了我们一个典型的布尔$\sigma$代数. 对于形如$\mathfrak{A}/\mathfrak{N}$的布尔$\sigma$代数，区别点($X$ 的元素)、集合($\mathfrak{A}$的元素)和$\mathfrak{A}/\mathfrak{N}$的元素(模零集的集合)特别重要.

对于两个布尔σ代数之间的映射Φ：$\mathfrak{A}\to\mathfrak{B}$，若 $\Phi(A')=\Phi(A)'$，$\Phi(A_1\vee A_2)=\Phi(A_1)\vee\Phi(A_2)$，且 $\Phi(\bigvee A_i)=\bigvee\Phi(A_i)$，我们称它为$\sigma$同态. 因此存在从$\mathfrak{A}$到$\mathfrak{A}/\mathfrak{N}$的自然$\sigma$同态，它是通过将 $\Phi(A)$作为$\mathfrak{A}/\mathfrak{N}$中包含$\mathfrak{A}$的等价类来定义的.

令$(X,\ \mathfrak{A},\ \mathfrak{N})$为具有零集的可测空间且 f，g 为 X 上的两个可测函数. 我们说 $f=g$ 几乎处处$[\mathfrak{N}]$，若存在一个集合 $N\in\mathfrak{N}$使得只要有 $x\notin N$ 就有 $f(x)=g(x)$. 在文中许多地方不区别几乎处处相等的函数，这导致我们考虑模相等几乎处处成立的 X 上的实值可测函数组成的空间 $M(X)$. 我们常常遵从早期的不正式的实际做法，即谈到一个函数 f 属于 $M(X)$我们指的是 f 所属的等价类$[f]$. 我们将模相等几乎处处成立的扩充的实值函数空间记为 $M^*(X)$.

若 f 和 g 是两个几乎处处相等的可测函数，则集合$\{x：f(x)<\alpha\}$和$\{x：g(x)<\alpha\}$仅相差一个集合 $N\in\mathfrak{N}$. 因此 $M^*(X)$的每个元素$[f]$通过对于某个属于$[f]$的 f 令 B_α 为包含

$\{x: f(x)<\alpha\}$的等价类确定了布尔 σ 代数$\mathfrak{A}/\mathfrak{N}$的元素族$\{B_\alpha: \alpha\in\mathbf{R}\}$. 我们称$\mathfrak{A}/\mathfrak{N}$的元素的族$\{B_\alpha\}$为函数 f 的**体**(soma)[⊖]. 一个函数的体满足

i. 对于 $\alpha<\beta$, $B_\alpha<B_\beta$.

ii. 只要 $\alpha_i<\beta$ 且 $\beta=\lim\alpha_i$, $B_\beta=\bigvee B_{\alpha_i}$.

任何以 $\mathbf{R}$ 为序且满足(i)和(ii)的布尔 σ 代数的元素簇$\{B_\alpha\}$称为一个抽象体. 以下命题说的是布尔 σ 代数$\mathfrak{A}/\mathfrak{N}$的每个体是 $M^*(X)$的某个元素的体. 396

2. 命题　令$(X, \mathfrak{A}, \mathfrak{N})$为具有零集的测度代数且$\{B_\alpha\}$是$\mathfrak{A}/\mathfrak{N}$的体, 那么惟一存在$M^*(X)$的元素$[f]$使得$\{B_\alpha\}$是$[f]$的体. 元素$[f]$为实值, 即它属于 $M(X)$, 当且仅当

iii. $\bigvee_{n=1}^{\infty} B_n=X$ 及 $\bigwedge_{n=-\infty}^{\infty} B_n=\varnothing$.

证明　体是$\{B_\alpha\}$的函数 f 的存在性由命题 11.10 得到. 为建立惟一性, 令 g 为任意可测函数, 其体是$\{B_\alpha\}$. 那么对于每个满足 $\alpha<\beta$ 的有理数对$\langle\alpha, \beta\rangle$ 集合

$$\{x: g(x)<\alpha<\beta\leqslant f(x)\}=\{x: g(x)<\alpha\}\sim\{x: f(x)<\beta\},$$

因而必须也属于$\mathfrak{N}$. 因此集合

$$\{x: g(x)<f(x)\}=\bigcup_{\langle\alpha,\beta\rangle}\{x: g(x)<\alpha<\beta\leqslant f(x)\}$$

必须属于$\mathfrak{N}$. 类似地, 集合$\{x: g(x)>f(x)\}$必须属于$\mathfrak{N}$, 因而 $f=g$ 几乎处处成立. ■

以下命题是有用的系:

3. 命题(西科尔斯基)　令$\langle X, \mathfrak{A}, \mathfrak{N}\rangle$为具有零集的可测空间, 且令 Φ 为$[0, 1]$的博雷尔集族$\mathcal{B}$到 σ 代数$\mathfrak{A}/\mathfrak{N}$的 σ 同态, 满足 $\Phi([0, 1])=X$, 那么存在从 X 到$[0, 1]$的可测映射使得对于每个 $B\in\mathcal{B}$ 有 $\varphi^{-1}[B]$属于等价类 $\Phi(B)$. 若 ψ 是具有这个性质的任意其他点映射, 则 $\psi=\varphi$ 在除$\mathfrak{N}$的子集外成立.

证明　令 $A_\alpha=\Phi([0, \alpha])$, 那么$\{A_\alpha\}$是属于$\mathfrak{A}/\mathfrak{N}$的体, 因而存在一个函数 $\varphi\in M(X)$, 其体是$\{A_\alpha\}$. 由于 $A_0=\varnothing$且对于 $\alpha>1$ 有 $A_\alpha=X$, 因而 $0\leqslant\varphi\leqslant1$, 且 φ 将 X 映入$[0, 1]$. 令 Ψ: $\mathcal{B}\to\mathfrak{A}/\mathfrak{N}$为定义为 $\Psi(B)=\varphi^{-1}(B)$的 σ 同态, 那么

$$\Psi([0,\alpha))=A_\alpha=\Phi([0,\alpha)).$$

因此 Ψ 和 Φ 在半开区间上一致. 由于它们是 σ 同态, 因而它们在 σ 代数上一致. 因此对于所有博雷尔集有 $\Phi=\Psi$. ■ 397

习题

8. 证明在一个布尔 σ 代数中有

$$B\wedge\left(\bigvee_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\bigvee_{n=1}^{\infty}(B\wedge A_n).$$

9. 令$\mathfrak{A}$为布尔 σ 代数且$\mathfrak{N}$是布尔 σ 理想. 证明若 $A\Delta B\in\mathfrak{N}$, 则 $A'\Delta B'\in\mathfrak{N}$, 且若$(A_n\Delta B_n)\in\mathfrak{N}$, 则我们有

⊖ 该词来源于希腊语, 是指"体"(body). 而在 Carathéodory[17]中, 称$\{B_\alpha\}$为"体尺度"(soma scale), 称每个 B_α 为"体"(soma).

$$(\bigvee A_n)\Delta(\bigvee B_n)\in \mathfrak{N}.$$

10. 令$\mathfrak{A}$和$\mathcal{B}$为布尔σ代数且Φ：$\mathfrak{A}\to\mathcal{B}$为$\sigma$同态．令$\mathfrak{N}=\{N\in\mathfrak{A}：\Phi(N)=0\}$，那么$\mathfrak{N}$是$\mathfrak{A}$的一个$\sigma$理想.

15.3　测度代数

谈到**测度代数**，我们指的是布尔σ代数$\mathfrak{A}$与定义在其上的非负实值函数μ使得$\mu(A)=0$当且仅当$A=0$且

$$\mu(\bigvee_{i=1}^{\infty} A_i)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu A_i.$$

若对于$i\neq j$，$A_i\wedge A_j=0$，我们称μ是$\mathfrak{A}$上的测度．若$\langle X，\mathcal{B}，\mu\rangle$是一个有限测度空间，$\mathfrak{N}$是零测度集簇，且将$\mu$考虑为布尔$\sigma$代数$\mathfrak{A}=\mathcal{B}/\mathfrak{N}$上的测度，即若我们无法区分相差一个零测度集的$\mathcal{B}$集合，则得到一个测度代数.

在布尔代数中我们定义两个元素的对称差$A\Delta B$为$A\Delta B=(A\wedge B')\vee(A'\wedge B)$．若定义$\rho(A，B)=\mu(A\Delta B)$，则一个测度代数成为一个度量空间．这个度量空间总是完备的，且映射$A\to A'$，$\langle A，B\rangle\to A\vee B$和$\langle A，B\rangle\to A\wedge B$是连续的．一个测度代数称为**可分的**，若它作为一个度量空间是可分的.

对于从测度代数$\langle\mathfrak{A}，\mu\rangle$到测度代数$\langle\mathcal{B}，v\rangle$的映射$\Phi$，若$\Phi(A')=[\Phi(A)]'$，$\Phi(A_1\vee A_2)=\Phi(A_1)\vee\Phi(A_2)$及$\mu(A)=v(\Phi(A))$，则我们称它为**同构映入**．若$\Phi$是映上的则称它为同构．若测度代数作为一个度量空间来考虑，则一个同构是保持补和有限并的等距．这就得到一个同构也保持可数并与交(见习题10).

398

测度代数$\mathfrak{A}$的一个元素$A\neq0$称为一个**原子**，若$B\leqslant A$仅发生在$B=A$且$B=0$的情形．令$\mathfrak{M}$为$[0，1]$的可测子集类，$\mathfrak{N}$为零测度子集类，而m为勒贝格测度，那么$\langle\mathfrak{M}/\mathfrak{N}，m\rangle$是一个无原子的可分测度代数．以下定理断言，除同构外，这样的测度代数仅有一个.

4. 定理(卡拉泰奥多里)　*令$\langle\mathfrak{A}，\mu\rangle$为可分测度代数满足$\mu(X)=1$，那么存在$\langle\mathfrak{A}，\mu\rangle$到由$[0，1]$上的勒贝格测度$m$诱导的测度代数$\langle\mathfrak{M}/\mathfrak{N}，m\rangle$的同构$\Phi$．当且仅当$\mathfrak{A}$无原子时同构$\Phi$是映上的.*

证明　由于$\langle\mathfrak{A}，\mu\rangle$可分，存在稠密于$\mathfrak{A}$的元素序列$\langle A_n\rangle$．令$\mathfrak{A}_n$为布尔代数，它由取集合$A_1$，…，$A_n$的所有交集的并集与它们的补集得到，并令$\mathfrak{A}_\infty=\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathfrak{A}_n$，那么$\mathfrak{A}_\infty$仍然是一个布尔代数．这是因为，给定任意属于$\mathfrak{A}_\infty$的$A$和$B$，它们分别属于$\mathfrak{A}_n$和$\mathfrak{A}_m$．但若$m\leqslant n$，则有$\mathfrak{A}_m\subset\mathfrak{A}_n$，因而$A'$，$A\vee B$和$A\wedge B$全都包含于$\mathfrak{A}_n\subset\mathfrak{A}_\infty$.

我们将通过归纳定义$\mathfrak{A}_\infty$映入所有$[0，1]$的半开子区间的有限并集的代数$\mathscr{I}$的映射Φ．代数$\mathfrak{A}_1$由4个集合0，A_1，A_1'，X构成，且$\mu A_1+\mu A_1'=\mu X=1$．令

$$\Phi(A_1)=[0,\mu A_1),\Phi(A_1')=[\mu A_1,1),\Phi(0)=\varnothing,\Phi(X)=[0,1).$$

那么Φ保持并、交、补与测度．假设现在已经在$\mathfrak{A}_{n-1}$上定义了Φ使得它将$\mathfrak{A}_{n-1}$映上由半开区间$[0，x_1)$，$[x_1，x_2)$，…，$[x_k，1)$生成的代数且Φ是测度保持以及保持并和补的测度．我们想将

映射 Φ 延拓到 $\mathfrak{A}_n$. 令 B_0，…，B_k 为属于 $\mathfrak{A}_{n-1}$ 的集合，它们被映上区间 $[0, x_1)$，…，$[x_k, 1)$，那么 $\mathfrak{A}_{n-1}$ 由集合 B_0，…，B_k 的所有有限并集组成且 $\mathfrak{A}_n$ 由集合 $A_n \wedge B_0$，…，$A_n \wedge B_k$，$A_n' \wedge B_0$，…，$A_n' \wedge B_k$ 的所有有限并集组成. 对那些交集为 0 的集合设 Φ 等于 $\varnothing$. 对那些交集非零的集合令 $\Phi(A_n \wedge B_j) = [x_j, x_j + \mu(A_n \wedge B_j))$ 及 $\Phi(A_n' \wedge B_j) = [x_j + \mu(A_n \wedge B_j), x_{j+1})$.
由于

$$\mu(A_n \wedge B_j) + \mu(A'_n \wedge B_j) = \mu(B_j) = x_{j+1} - x_j,$$

我们看到这些是适当定义的区间，Φ 是测度保持，且

$$\Phi(A_n \wedge B_j) \cup \Phi(A'_n \wedge B_j) = [x_j, x_{j+1}) = \Phi(B_j).$$

从中得出我们能延拓 Φ 到所有 $\mathfrak{A}_n$ 使得它保持并、补与测度.

为此我们已经通过归纳定义了从 $\mathfrak{A}_\infty$ 到 $\mathfrak{M}/\mathfrak{N}$ 的映射 Φ 使得它是测度保持. 因此它是一个等距. 由于 $\mathfrak{A}_\infty$ 在 $\mathfrak{A}$ 稠密且度量空间 $\mathfrak{M}/\mathfrak{N}$ 是完备的，因此能延拓 Φ 使之成为从 $\mathfrak{A}$ 到 $\mathfrak{M}/\mathfrak{N}$ 的等距.

399

为看到 Φ 保持补，令 E 为任意属于 $\mathfrak{A}$ 的元素且选取 $A \in \mathfrak{A}_\infty$ 使得 $\mu(E \Delta A) < \varepsilon$. 那么 $A' \in \mathfrak{A}_\infty$ 且 $\mu(E' \Delta A') = \mu(E \Delta A) < \varepsilon$. 由于 Φ 是一个等距且 $\Phi(A') = \sim\Phi(A)$，我们有 $m(\Phi(E') \Delta \widetilde{\tilde{\Phi}(A)}) < \varepsilon$ 与 $m(\widetilde{\tilde{\Phi}(E)} \Delta \widetilde{\tilde{\Phi}(A)}) = m(\Phi(E) \Delta \Phi(A)) < \varepsilon$. 因此对于所有 $\varepsilon > 0$，$m(\Phi(E') \Delta \widetilde{\tilde{\Phi}(E)}) < 2\varepsilon$. 因此 $\Phi(E') = \sim\Phi(E)$ 属于代数 $\mathfrak{M}/\mathfrak{N}$. 类似的讨论表明

$$\Phi(E \vee F) = \Phi(E) \cup \Phi(F).$$

由于 Φ 是一个等距，因此它是一对一映入的. 为确定 Φ 的值域，令 E 为用以定义代数 $\mathfrak{A}_n$ 上的映射 Φ 的那些区间的端点集. 那么 Φ 将 $\mathfrak{A}_\infty$ 映上端点属于 E 的半开区间的有限并集的代数. 假定 $\bar{E}$ 不是所有的 $[0, 1]$，且令 I 为其构成的 $[0, 1) \sim \bar{E}$ 的开区间之一，即一个包含于 $\sim\bar{E}$ 其端点落在 $\bar{E}$ 的区间. 由于 I 的端点落在 $\bar{E}$，I 是 $\Phi[\mathfrak{A}_\infty]$ 内区间的极限，因而落在 $\Phi[\mathfrak{A}]$. 令 $A \in \mathfrak{A}$ 使得 $\Phi[A] = I$，且令 B 为 $\mathfrak{A}$ 的元素满足 $B \leqslant A$，那么 $\Phi[B] \subset I$. 由于 B 可被 $\mathfrak{A}_\infty$ 的元素逼近，因此 $\Phi(B)$ 可被 $\Phi[\mathfrak{A}_\infty]$ 的元素逼近. 而后面的这些集合或者包含 I 或者与 I 不相交. 因此 $\Phi(B) = I$ 或 $\Phi(B) = \varnothing$，且由于 Φ 是一对一的，我们有 $B = A$ 或 $B = \varnothing$，因此 A 是一个原子.

这样我们就证明了若 $\mathfrak{A}$ 无原子，则 $\bar{E} = [0, 1]$. 但若 $\bar{E} = [0, 1]$，则每个半开区间属于 $\Phi[\mathfrak{A}]$，因此 $\Phi[\mathfrak{A}]$ 包含每个博雷尔集. 由于 $[0, 1]$ 上的每个可测子集是博雷尔集和一个零测度集的并集，在这种情形下我们有 $\Phi[\mathfrak{A}] = \mathfrak{M}/\mathfrak{N}$. ■

该定理说的是，若 $\langle X, \mathcal{B}, \mu \rangle$ 是一个无原子的可分测度空间且满足 $\mu(X) = 1$，则相应的测度代数同构于由 $[0, 1]$ 上的勒贝格测度诱导的测度代数. 它未曾断言 $[0, 1]$ 与 X 间的点映射的存在性，甚至 $\mathcal{B}$ 到 $[0, 1]$ 的可测集的集映射的存在性，而是仅断言 $\mathcal{B}$ 的模零集的集合与模零测度集的可测集的对应. 因此若有一个集合 $B \in \mathcal{B}$，我们不能将它赋予一个可测集而是仅能赋予一个 $[0, 1]$ 的可测集的等价类. 下一节我们将建立断言由给定的测度代数的映射诱导的点映射的存在性的准则.

400

习题

11. a. 令 $\langle \mathfrak{A}, \mu \rangle$ 为测度代数且 $\langle A_n \rangle$ 是元素序列使得对于 $n \neq m$，$A_n \wedge A_m = 0$. 那么 $\bigvee_{n=1}^{\infty} A_n =$

$\lim\limits_{k\to\infty}\bigvee\limits_{n=1}^{k}A_n$.（这里 lim 意味着在由 μ 定义的度量空间的极限.）

b. 令$\langle\mathfrak{A},\mu\rangle$为测度代数且$\langle A_n\rangle$为元素属于$\mathfrak{A}$的任何序列，那么 $\bigvee\limits_{n=1}^{\infty}A_n=\lim\limits_{k\to\infty}\bigvee\limits_{n=1}^{k}A_n$.

c. 证明若 Φ 是测度代数$\langle\mathfrak{A},\mu\rangle$到测度代数$\langle\mathcal{B},v\rangle$的同构映射，则

$$\Phi\Big(\bigvee_{n=1}^{\infty}A_n\Big)=\bigvee_{n=1}^{\infty}\Phi(A_n);$$

即 Φ 是 σ 同态映射.

12. 证明作为一个度量空间的测度代数完备.［若$\langle A_n\rangle$是柯西序列，可以假设对于 m，$n\geqslant N$ 有 $\mu(A_n\Delta A_m)<2^{-N}$. 于是，若 $B_n=\bigvee\limits_{v=n}^{\infty}A_v$，我们有 $\mu(A_n\Delta B_n)<2^{-n+1}$. 现在 $\bigwedge\limits_{n=1}^{\infty}B_n=\lim B_n=\lim A_n$.］
13. 证明在一个测度代数中运算$'$，$\wedge$ 和 $\vee$ 是连续的.
14. 证明一个测度代数(如同我们已经定义的满足 $\mu(X)<\infty$)仅可能有可数个原子. 因此任何完备可分测度代数或者同构于区间(具有勒贝格测度)，或者同构于由可数个原子组成的测度空间(离散测度空间)，或者同构于前两个空间的并集.
15. 讨论测度代数，其中我们允许 μ 为扩充的实值函数.

15.4 博雷尔等价

若$\langle X,\mathfrak{A}\rangle$和$\langle Y,\mathcal{B}\rangle$是可测空间，我们或许会问在什么条件下它们等价. 这里等价指的是存在 X 映上 Y 的一对一映射 φ 使得 φ 和 φ^{-1} 是可测的，即对于每个 $A\in\mathfrak{A}$ 有 $\varphi[A]\in\mathcal{B}$ 和对于每个 $B\in\mathcal{B}$ 有 $\varphi^{-1}[B]\in\mathfrak{A}$. 一般说来这是一个困难的问题. 本节我们将证明当 X 和 Y 是不可数完备可分度量空间时，这种等价性总是成立的.

401

谈到度量空间 X 上的博雷尔集类我们指的是，如同通常的定义，X 上包含开集(或等价地，包含闭集)的最小 σ 代数. 令$(X,\mathfrak{A})$和$(Y,\mathcal{B})$为两个具有它们的博雷尔集族的度量空间. 一个映射 f：$X\to Y$ 称为博雷尔映射或博雷尔可测映射，若对于 Y 的每个博雷尔集 $f^{-1}[B]$是 X 的博雷尔集. 为证明 f 是博雷尔映射仅需证明对于每个属于 Y 的开集 O，$f^{-1}[O]$是 X 的博雷尔集. 因此连续映射是博雷尔映射. X 映上 Y 的一对一博雷尔映射(其逆 f^{-1} 也是博雷尔映射)称为**博雷尔等价**或博雷尔同构映射. 我们现在的目标是证明每个不可数完备可分度量空间与$[0,1]$博雷尔等价.

若定义博雷尔映射或博雷尔同构映射的阶或类我们能够对博雷尔等价说得更精确些. 若一个博雷尔映射 f 是连续的我们说它是贝尔 0 类映射；若对于每个开集 $O\subset Y$，$f^{-1}[O]$是一个 F_σ，我们说它是贝尔 1 类映射[⊖]. 对于一个博雷尔等价 f，若 f 是 α 类 f^{-1} 是 β 类我们称它为(α,β)类. 注意到连续映射和 1 类映射的(任意阶)合成是 1 类博雷尔映射. 我们将证明不可数完备可分度量空间与$[0,1]$的博雷尔等价可取为$(1,1)$类.

⊖ 更高阶类的定义参见 Kuratowski[11]，第 373 页.

我们从一些初步的观察和引理开始. 为了本节的目标我们称度量空间的子集 E 为厚的，若每个与 E 相交的开集相交 E 于无限集，即若 E 的每个非空相对开子集是无限的. 我们称度量空间的子集 E 为非常厚的，若 E 的每个非空相对开子集是不可数的. 注意到厚和非常厚的定义是绝对的：它们仅依赖于 E 而不依赖于 X 或 E 嵌入 X 的方式.

点 $x\in E$ 称为孤立的，若存在一个开集 O 使得 $O\cap E=\{x\}$. 容易看到一个集合 E 是厚的当且仅当它没有孤立点. 若 E 是厚的，则 $\bar{E}$ 也是厚的. 若 E 是厚的且 O 是开的，则 $E\cap O$ 是厚的.

5. 引理 *每个可分度量空间 X 是非常厚集 E 和可数(开)集 C 的不相交并集.*

证明 令 C 为那些包含于可数开集的 $x\in X$ 的集合. 由于 X 可分，林德勒夫性质成立，且 C 可被可数开集簇覆盖，该簇中的每个集合是可数的. 因此 C 是可数开集. 集合 $E=X\sim C$ 具有性质：每个包含 E 的点的开集必包含 X 的许多不可数个点，因此包含 E 的不可数个点. 因此，E 是非常厚的. ■

402

6. 引理 *令 F 为非空厚闭子集，那么 $F=F_1\cup G$ 满足 $F_1\cap G=\varnothing$，其中 F_1 和 G 是非空厚集，F_1 闭且 G 为 F 与开集的交.*

证明 令 x_0 和 x_1 为 F 的两个点，O 为任意包含 x_1 且满足 $x_0\notin\bar{O}$ 的开集，那么 $O\cap F$ 是厚的因而 $F_1=\overline{O\cap F}$ 也是厚的. 设 $G=F\cap\tilde{F}_1$，那么 G 是厚的. 由于 $x_0\in F_1$，因此集合 F_1 和 G 非空. ■

7. 引理 *设 X 是非空厚的可分度量空间，那么 $X=\bigcup G_i$，这里 $\langle G_i\rangle$ 是直径小于 1 的不相交非空厚集的无限序列，且满足每个 G_i 是闭集与开集的交集.*

证明 由于 X 可分，因此它可被可数个直径小于 1 的开集簇 $\{O_j\}$ 覆盖. 设

$$G_k=\bar{O}_k\sim\Big(\bigcup_{j=1}^{k-1}\bar{O}_j\Big),$$

那么 G_k 是厚的，是闭集与开集的交集且直径小于 1. 令 $\langle G_i\rangle$ 为将 G_k 中的那些空集去掉得到的序列，那么 $X=\bigcup G_i$，G_i 不相交且非空，满足 $G_1=\bar{O}_1$ 闭. 若这个序列仅是一个有限序列，我们可以对 G_1 反复运用引理 6 以得到所要的无限序列. ■

如同通常的做法，我们用 $\mathbf{N}$ 表示具有离散拓扑的自然数集，或等价地具有度量 $\rho(n,m)=1$ 若 $m\neq n$. 那么可数个 N 的复制的直接积 $\mathbf{N}^\omega$ 是同胚于区间的无理点组成的空间 $\mathscr{I}$ 的度量空间(见习题 9.45 或习题 17). 空间 $\mathbf{N}^\omega$ 由所有整数的无限序列 $\langle m_j\rangle$ 组成，且它的拓扑的基由形如

403

$$N_{i_1\cdots i_n}=\{\langle m_j\rangle\in\mathbf{N}^\omega : m_j=i_j \text{ for } j\leqslant n\}.$$

的集合族给出.

8. 命题 *令 X 为无孤立点的完备可分度量空间，$\mathscr{I}$ 为单位区间的无理点的集合，那么存在 $\mathscr{I}$ 映上 X 的一对一连续映射 φ 使得对于 $\mathscr{I}$ 的每个开子集 O，$\varphi[O]$ 是 X 的一个 F_σ.*

证明 仅需构造出 $\mathbf{N}^\omega$ 映上 X 的一对一映射 φ 满足对于 $\mathbf{N}^\omega$ 的每个开集 O，$\varphi[O]$ 是一个 F_σ.

由于 X 无孤立点，因此它是厚的. 根据引理 7

$$X=\bigcup G_i,$$

其中$\langle G_i\rangle$是无限非空不相交厚集序列，且每一个是开集与闭集的交集．因此每个$\langle G_i\rangle$既是一个G_δ又是一个F_σ．此外，对于x，$x'\in G_i$，$\rho(x,x')<1$，其中$\rho=\rho_0$是X的度量．

由于G_i是一个G_δ且X是完备的，因此存在一个G_i的度量ρ_1在G_i上等价于ρ_0且使得G_i成为完备度量空间(命题7.33)．对于每个G_i定义这样一个度量，并且通过当$x_i\in G_i$，$x_j\in G_j$，$i\neq j$时设$\rho_1(x_i,x_j)=\infty$将它们组合成X的扩充的实值度量．我们也取$\rho_1\geqslant 2\rho_0$．

由于每个G_i是厚的完备可分度量空间，因此可以重复这一过程得到

$$G_i=\bigcup_{j=1}^{\infty}G_{ij},$$

其中$\langle G_{ij}\rangle_{j=1}^{\infty}$是无限不相交非空厚集序列，每一个是开集与($X$内)闭集的交集，对于$x$，$x'\in G_{ij}$，$\rho_1(x,x')<1$．选取$\rho_2$在$G_{ij}$上等价于$\rho$满足$\rho_2\geqslant 2\rho_1$且$(G_{ij},\rho_2)$是完备度量空间．

根据归纳我们将每个有限序列$s_n=\langle i_1,\cdots,i_n\rangle$对应于集合$G_{i_1,\cdots,i_n}$，其为开集与闭集的交集，在度量$\rho_{n-1}$其直径小于1且关于度量$\rho_n\geqslant 2\rho_{n-1}$完备．两个长度为$n$的不同序列对应于不相交的集合．也有

404

$$G_{i_1\cdots i_{n-1}}=\bigcup_{j=1}^{\infty}G_{i_1\cdots i_{n-1}j}.$$

令$s=\langle i_j\rangle\in\mathbf{N}^\omega$，且设$s_n=\langle i_1,\cdots,i_n\rangle$．由于$G_{s_n}$的直径$\rho$小于$2^{-n}$，因此交集

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}G_{s_n}$$

至多有一点．

对于每个n选取元素$x_n\in G_{s_n}$．那么对于$l\geqslant n$有$x_l\in G_{s_l}\subset G_{s_n}$，因而对于$l$，$m\geqslant n$有$\rho(x_l,x_m)<2^{-n}$．因此$\langle x_n\rangle$是一个柯西序列，且根据$\langle X,\rho\rangle$的完备性它收敛于元素$x_s\in X$．对于$l$，$m\geqslant n$我们也有

$$\rho_k(x_l,x_m)<2^{k-n}$$

因此$\langle x_j\rangle$是一个属于(G_{s_k},ρ_k)的柯西序列．因此，$\langle x_k\rangle$收敛于G_{s_k}的某一点，该点必为x_s，这是由于ρ和ρ_k在G_k上等价，且在(X,ρ)中$\langle x_j\rangle$至多有一个极限．因此$x_s\in\bigcap G_{s_n}$．

由于$\bigcap G_{s_n}$至多有一点，我们看到它恰好有一点．因此对应关系$\psi(s)=x_s$定义了从$\mathbf{N}^\omega$到X的一一映射．容易看到它是映上的，且

$$\psi[N_{i_1\cdots i_n}]=G_{i_1\cdots i_n}.$$

因此每个$s\in\mathbf{N}^\omega$有一个邻域，即N_{s_n}，其在ψ的像的直径小于2^{-n}．因此，ψ是连续的．

每个开集$O\subset\mathbf{N}^\omega$是集合$N_{i_1\cdots i_n}$的可数并集，因此$\Psi[O]$是形如$G_{i_1\cdots i_n}$的集合的可数并集．由于后者的每一个是一个$F_\sigma$，因此$\Psi[O]$是一个$F_\sigma$．■

9．命题　*令Z为无理数集g和可数无限离散集D的直接并集，任何不可数完备可分度量空间X是由一对一连续映射φ生成的Z的像，φ满足对于每个开集$O\subset Z$，$\varphi[O]$是一个F_σ．*

证明　我们可以写$X=E\cup C$，其中E是非常厚集且C是可数的．若需要的话，去掉E的多余点，可以假定C是可数无限的．由于C是可数的，因此E仍然是非常厚的．由于X不可数，因此E非空．

现在C是一个F_σ，因而E是一个G_δ．因此E可被重新度量化而成为一个完备的厚的度量

空间．令 φ_0 为命题 8 给出的 $\mathcal{g}$ 映上 E 的映射．对 $z\in E$ 取 $\varphi(z)=\varphi_0(z)$，且取 φ 为 D 上任意的 D 映上 C 的一一映射．由于 Z 是 $\mathcal{g}$ 和 D 的直接并集，且在每个求和元 φ 连续，因此 φ 必须在 Z 上连续．每个开集 $O\subset Z$ 是 $\mathcal{g}$ 的开子集和 D 的子集的直接并集，因此 $\varphi[O]$ 是两个 F_σ 的集合的并集，因而它自身是一个 F_σ． ■ [405]

这个命题的映射 φ 是博雷尔等价类(0，1)，它的逆是博雷尔等价类(1，0)，由于博雷尔等价类(1，0)与一个博雷尔等价类(0，1)的复合是博雷尔等价类(1，1)，因此有以下的系：

10. 定理(库拉托夫斯基)　*令* (X, ρ) *和* (Y, σ) *为两个不可数完备可分度量空间，那么它们之间存在一个(1，1)类的博雷尔等价．*

特别地，每个不可数完备可分度量空间博雷尔等价于[0，1]．

习题

16. a. 证明一个厚集的闭包是厚的．
    b. 证明一个厚集与开集的交集是厚的．
    c. 证明一个集是厚的当且仅当它无孤立点．
17. 证明每个可数完备度量空间有孤立点．
18. 若度量空间存在一个由既开又闭的集合组成的拓扑基，则我们说它是零维的．
    a. 证明零维空间的每个子集是零维的．
    b. 令 E 为区间 $I\subset\mathbf{R}$ 的子集，其补集稠密于 I，那么 E 是零维的．
    c. 若 X 是零维的，则引理 7 的集合 G_i 可取为开的(和闭的)．
    d. 令 $E\subset\mathbf{R}$ 为一个无孤立点的 G_δ 使得 $\widetilde{E}$ 在 $\mathbf{R}$ 稠密，那么 E 同胚于 $\mathbf{N}^\omega$．[提示：在证明命题 8 中运用(c)．]

15.5　完备可分度量空间上的博雷尔测度

令 X 为度量空间．谈到 X 上的博雷尔测度我们指的是定义在 X 的博雷尔集上，或由于我们倾向于处理完备测度，这样测度的完备化上的测度．我们从李特尔伍德第一原理的一个推广开始，它叙述的是有限测度的某种正则形式． [406]

11. 命题　*令 μ 为度量空间 X 上的有限博雷尔测度，那么对于任意博雷尔集 E，我们有*

$$\mu E=\inf\{\mu O:E\subset O,O\text{ 是开的}\}$$

与

$$\mu E=\sup\{\mu F:F\subset E,F\text{ 是闭的}\}.$$

证明　满足该命题结论的集族 $\mathcal{R}$ 是一个 σ-代数．若 $\mathcal{R}$ 包含所有闭集，则它必须因此包含所有博雷尔集．

每个闭集自动满足这些条件的第二条，因此我们仅需证明对于每个闭集 F 有

$$\mu F=\inf\{\mu O:O\supset F,O\text{ 是开的}\}.$$

由于 $F\subset O$，因此 $\mu F\leqslant\mu O$，因而 μF 至多等于下确界．另一方面，度量空间的每个闭子集是一个 G_δ，因此存在开集序列 O_i 满足

$$F=\bigcap O_i.$$

由于 $mO_1<\infty$，所以有 $\mu F=\lim\mu O_i\geqslant\inf\{\mu O: O\supset F, O$ 开的$\}$. ■

两个测度空间$(X, \mathfrak{A}, \mu)$和$(Y, \mathcal{B}, v)$称为同构，若存在从 X 映上 Y 的一个一对一映射 φ 使得对于所有 $A\in\mathfrak{A}$ 有 $\varphi[A]\in\mathcal{B}$ 与 $v(\varphi[A])=\mu A$，且对于所有 $B\in\mathcal{B}$ 有 $\varphi^{-1}[B]\in\mathfrak{A}$，因此 $\mu(\varphi^{-1}[B])=vB$. 为简单起见，我们常说测度 μ 和 v 是同构的. 若两个测度是同构的，则它们的完备化是同构的. 作为任何不可数完备可分度量空间与$[0, 1]$的博雷尔等价性的推论，我们有以下命题：

12. 命题　每个不可数完备可分度量空间上的博雷尔测度同构于$[0, 1]$上的博雷尔测度.

在有限测度情形将得到更精确的结果，我们首先叙述可分度量空间上的博雷尔测度的一些性质，而把它们的证明留给读者(习题 21 和 22).

407

13. 命题　令 X 为可分度量空间且 μ 是 X 上的博雷尔测度，那么惟一存在一个闭集 $F\subset X$ 使得 $\mu(X\sim F)=0$ 且 $\mu(F\cap O)>0$ 对于每个满足 $F\cap O\neq\varnothing$ 的开集 O 成立.

命题给出的闭集 F 称为 μ 的**支撑**. 我们说博雷尔集 E 上的博雷尔测度 μ 严格正，若对于每个满足 $E\cap O\neq\varnothing$ 的开集 O 有 $\mu(E\cap O)>0$. 因此测度 μ 的支撑是使得 μ 在其上严格正的最大闭集和其补集为零测度集的最小闭集.

博雷尔集 A 称为测度 μ 的原子，若给定任何的博雷尔集 $B\subset A$ 或者有 $\mu B=0$ 或者有 $\mu(A\sim B)=0$. 以下命题是可分空间的原子的有用性质.

14. 引理　令 μ 为可分度量空间 X 上的博雷尔测度，A 是 μ 的一个原子，那么存在点 $x\in A$ 使得

$$\mu(A\sim\{x\})=0.$$

我们称$\{x\}$为原子 A 的支撑. 回顾若 μ 是有限的(或 σ 有限)则它只能有可数个原子. 令 μ 为有限(或 σ 有限)测度且 $C=\{x_i: \{x_i\}$是 μ 的原子的支撑$\}$，那么 C 是一个可数集，且 μ 限制于 $X\sim C$ 无原子. 定义为 $\mu_2E=\mu(E\cap C)$的测度 μ_2 称为 μ 的原子部分，定义为 $\mu_1(E)=\mu(E\sim C)$的测度 μ_1 称为 μ 的无原子部分或 μ 的连续部分. 显然，$\mu=\mu_1+\mu_2$，且这个分解是惟一的. 我们称 C 为测度 μ_2 的承载形. 注意到 μ_2 的支撑是集合 $\bar{C}$，它一般比 C 大，集合 $X\sim C$ 是一个 G_δ. 我们用以下引理概括这些事实：

15. 引理　令 μ 为可分度量空间 X 上的有限(或 σ 有限)博雷尔测度，那么 X 是不相交集的并集 $X=X_1\cup C$，其中 C 是可数集，X_1 无孤立点，μ 限制于 X_1 无原子.

证明　令 C 为 μ 的原子部分的承载形与引理 5 中具有非常厚的补的可数集的并. ■

谈到**标准测度空间**我们指的是以下测度空间之一：

408

i. 区间$[a, b]\subset\mathbf{R}$，其中 m 是勒贝格测度或 m 是零测度.

ii. 可数离散集(比如说，整数集)且 m 是任意有限测度.

iii. 类型(i)和类型(ii)之一的测度空间的不相交的并集.

16. 定理　令 μ 为完备可分度量空间 X 上的有限博雷尔测度，那么$(X, \mathcal{B}, \mu)$同构于标准测度空间. 若 X 不可数且 μ 无原子，则$(X, \mathcal{B}, \mu)$同构于类型(i)的标准测度空间.

证明　若 X 可数，则$(X, \mathcal{B}, \mu)$同构于类型(ii)的测度空间. 假设 X 不可数且有原子. 令 C 为 μ 的原子部分的承载形，那么 C 可与负整数集的子集一一对应，且 μ 限制于 C 同构于

该集上的测度.

由于 $X \sim C$ 是一个 G_δ，它可重新度量化为完备度量空间. 因此仅需证明若 μ 是不可数完备可分度量空间 X 上的无原子博雷尔测度，则 $(X, \mathcal{B}, \mu)$ 同构于 $[0, b]$ 上的勒贝格测度，其中 $b = \mu X$（我们假设它为正的）.

根据命题 12 测度空间 $(X, \mathcal{B}, \mu)$ 同构于 $[0, 1]$ 上的博雷尔测度 $\bar{\mu}$. 令 F 为 $\bar{\mu}$ 的支撑，且我们首先考虑 $F = [0, 1]$ 的情形. 令 $\varphi(x)$ 为 定义为 $\varphi(x) = \bar{\mu}[0, x]$ 的 $\bar{\mu}$ 的累积分布函数. 由于 $\bar{\mu}$ 无原子，因此 φ 是连续的. $\bar{\mu}$ 的支撑是 $[0, 1]$，因而 φ 严格增. 因此 φ 是 $[0, 1]$ 映上 $[0, b]$ 的同胚映射，容易看出对于任何博雷尔集 $E \subset [0, 1]$，$\bar{\mu}E = m(\varphi[E])$.

剩下的仅需考虑 $\bar{\mu}$ 的支撑 F 适当地包含于 $[0, 1]$ 的情形. 令 $G = (0, 1) \cap \tilde{F}$，那么 G 是一个开集因而是可数个开区间簇的不相交的并集. 令 $\psi(x) = \bar{\mu}[0, x]$，那么 φ 是 $[0, 1]$ 映上 $[0, b]$ 的连续映射，其中 $b = \mu X$，但 ψ 将 G 的每个区间映上单点. 令 L 和 R 为 G 的区间的左（或右）端点集，那么 $\psi[G] = \psi[L] = \psi[R]$.

设 $H = F \cap \tilde{R} \cap \tilde{L} \cap \tilde{D}$，其中 D 是 F 的可数子集，那么 φ 是 F 映上 $[0, b] \sim \psi[R]$ 的一对一连续映射. 由于 ψ 将 F 的紧集映到紧集，因而它将 H 的相对闭子集映上 $[0, b] \sim \psi[R \cup D]$ 的相对闭子集. 因此它是 H 映上 $[0, b] \sim \psi[R \cup D]$ 的同胚映射. 令 N 为包含于 $\psi[H]$ 的无孤立点的非空 G_δ 且有 $mN = 0$. 根据引理 6 我们可以把 N 表示为两个非空无孤立点的 G_δ 的不相交的并集 $N = N_1 \cup N_2$. 由于 $\psi^{-1}[N]$ 是无孤立点的 G_δ，因而存在一个 $\psi^{-1}[N]$ 与 N_1 之间的博雷尔等价 φ、一个 G 与 N_2 之间的博雷尔等价以及一个 $L \cup R \cup D$ 与 $\psi[R \cup D]$ 之间的博雷尔等价. 将这些博雷尔等价与 $\psi \mid (H \sim \psi^{-1}[N])$ 放在一起给出了 $[0, 1]$ 与 $[0, b]$ 的博雷尔等价 φ. 对任何属于 $[0, b]$ 的博雷尔集 E，

$$\begin{aligned} mE &= m([E \cup \tilde{N}] \sim \psi[R \cup D]) \\ &= \mu(\psi^{-1}[E \cup \tilde{N}] \sim \psi[R \cup D]) \\ &= \mu(\psi^{-1}[E]). \end{aligned}$$

■

409

在建立最后一个定理时，我们不曾关注博雷尔等价的类型，但有时有其他博雷尔等价版本是有用的，在那里我们的来自于“标准”空间的映射是如命题 9 给出的 $(0, 1)$ 型的博雷尔等价. 由于现在对博雷尔等价 φ 有更多的要求，因此必须允许所取的标准空间有更多的自由度. 为简单起见我们仅考虑无原子测度的情形，这导致下面的定义.

谈到*无原子标准度量测度空间*我们指的是其上具有博雷尔测度 m 的度量空间 Z，其中 (Z, m) 是以下测度空间之一：

i. $Z = [a, b] \sim D_1$，其中 $[a, b] \subset \mathbf{R}$，$D_1$ 可数且 m 是勒贝格测度.

ii. $Z = (b, c] \sim D_2$，其中 $(b, c] \subset \mathbf{R}$，$D_2$ 可数且 m 是零测度.

iii. 类型(i)的测度空间和类型(ii)测度空间之一的不相交的并集.

用命题 9 而非它的系，我们有以下定理. 该定理的证明细节留给读者.

17. 定理 *令 μ 为完备可分度量空间 X 上的有限博雷尔测度，那么存在从标准度量测度空间 Z 映上 X 的连续一对一映射 φ：$Z \to X$ 使得对于每个开集 $O \subset Z$，$\varphi[O]$ 是一个 F_σ 且对于每个博雷尔集 $E \subset X$，$\mu E = m(\varphi[E])$.*

我们必须允许从 Z 去掉可数集 D_1 和 D_2；否则根据 φ 的连续性，$\varphi[Z]$厚的部分是紧的和 [410] 连通的．此外，当 F 是 μ 的支撑时 $\varphi^{-1}[X\sim F]$必须为开的．因此当 μ 的支撑不包含 X 所有的厚的部分时类型(ii)的成员出现在我们面前．

作为该定理的推论我们有以下命题，当 X 完备时它加强了命题 11.

18. 命题 令 X 为完备可分度量空间且 μ 为 X 上的博雷尔测度，那么对于每个满足 $\mu E<\infty$的博雷尔集 E，我们有

$$\mu E = \sup\{\mu K : K \subset E, K \text{ 紧}\}.$$

证明 用 v 代替 μ，这里 $vA=\mu(A\cap E)$，可以看到仅需对有限测度建立命题．为简单起见，我们假定 μ 无原子，那么存在标准度量测度空间映上 X 的连续映射 φ 使得 $\mu E=mA$，其中$A=[a,b]\cap\varphi^{-1}[E]$．命题 3.15 说的是给定 $\varepsilon>0$，存在闭集 $F\subset A$ 使得

$$mF > mA - \varepsilon.$$

由于 F 是 $\mathbf{R}$ 的闭有界子集，因此它是紧的，根据 φ 的连续性，$K=\varphi[F]$也是紧的．因此 $K\subset E$ 且

$$\mu K = mF > mA - \varepsilon = \mu E - \varepsilon.$$

由于 ε 任意，因此得到命题． ■

习题

19. 证明满足命题 11 结论的集簇$\mathcal{R}$是一个 σ 代数．［提示：
    a. 集合 E 满足第一个条件当且仅当 $\widetilde{E}$ 满足第二个条件．
    b. 若$\langle E_i\rangle$是集合序列，则每个 E_i 满足第一个条件，$\bigcap E_i$ 也如此．
    c. 若$\langle E_i\rangle$是集合序列，则每个 E_i 满足第二个条件，$\bigcup E_i$ 也如此．
    d. 集簇$\mathcal{R}$是一个 σ 代数．］
20. 证明若测度空间$(X,\mathcal{A},\mu)$和$(Y,\mathcal{B},v)$是同构的，则它们的完备化$(X,\mathcal{A}_0,\bar{\mu})$和$(Y,$ [411] $\mathcal{B}_0,\bar{v})$也是同构的．
21. 证明命题 13．［提示：令 $U=\bigcup\{O: O \text{ 开且 } \mu O=0\}$，那么 $\mu U=0$，$F=X\sim U$ 是所要的集合．］
22. 证明引理 14．［提示：定义 v 为 $vE=\mu(E\cap A)$，那么 v 的支撑恰有一点．］
23. 证明定理 17.
24. 当 μ 有原子时将命题 18 的证明细节补充完整．
25. a. 证明：若我们允许半有限区间$[0,\infty)$出现在标准测度空间的定义中，则定理 16 可延拓到 σ 有限测度 μ 的情形．
    b. 修改标准度量测度空间的定义使得定理 17 也包含 σ 有限测度的情形．
    c. 证明命题 18 中的假设"$\mu E<\infty$"可以减弱为"E 是一个 σ 有限测度的集合"．

15.6 完备可分度量空间上的点映射与集映射

令$(X,\mathcal{A},\mathfrak{N})$和$(Y,\mathcal{B},\mathfrak{M})$为具有零集的可测空间，其中 X 和 Y 为可分度量空间，$\mathcal{A}$ 和$\mathcal{B}$是它们的博雷尔集．本节我们研究在何种程度布尔 σ 代数$\mathcal{A}/\mathfrak{N}$和$\mathcal{B}/\mathfrak{M}$的 σ 同态与同构由点映射诱导．以下命题是命题 3 与定理 10 的直接结果．

19. 命题　令$(X, \mathcal{A}, \mathfrak{N})$为具有零集的可测空间，$Y$是不可数完备可分度量空间，$\Phi$是$Y$的博雷尔集$\mathcal{B}$到$\mathcal{A}/\mathfrak{N}$的$\sigma$同态，那么存在一个$X$映上$Y$的博雷尔可测映射$\varphi$：$X \to Y$使得对于每个$B \in \mathcal{B}$有$\varphi^{-1}[B]$属于等价类$\Phi(B)$. 若$\psi$是任何具有这个性质的其他博雷尔映射，则$\varphi = \psi$ a. e. $[\mathfrak{N}]$.

以下定理是冯·诺伊曼定理的一个推广，其假设了Φ是关于$\mathcal{A}$和$\mathcal{B}$上的适当测度的测度保持，这个假设是不必要的.

20. 定理　令X和Y为完备可分度量空间，$\mathcal{A}$和$\mathcal{B}$是它们的博雷尔集，$\mathfrak{M}$和$\mathfrak{N}$是$\mathcal{A}$和$\mathcal{B}$内的σ理想. 若Φ是$\mathcal{A}/\mathfrak{M}$映上$\mathcal{B}/\mathfrak{N}$的σ同构，则存在集合$X_0 \in \mathfrak{M}$和集合$Y_0 \in \mathfrak{N}$以及$Y \sim Y_0$映上$X \sim X_0$的一对一映射φ，使得φ和φ^{-1}可测且$\Phi(A) = \varphi^{-1}[A]$模$\mathfrak{N}$.　412

证明　根据命题 19 存在诱导Φ和Φ^{-1}的博雷尔可测映射φ：$Y \to X$和ψ：$X \to Y$. 由于$\psi \circ \varphi$诱导$\mathcal{A}/\mathfrak{N}$上到其自身的恒等σ同构，根据命题 19 的惟一性断言我们必须有$\psi \circ \varphi = \text{id}$ a. e. $[\mathfrak{N}]$. 因此存在集合$X_0 \in \mathfrak{M}$使得φ是$X \sim X_0$映上$\varphi[X \sim X_0]$的博雷尔等价. 由于$\varphi[X \sim X_0]$属于等价类$\Phi^{-1}(X)$，它是包含Y的等价类，因此有$Y_0 = Y \sim \varphi[X \sim X_0]$是$\mathfrak{N}$的一个元素. ■

若博雷尔集X_0和Y_0有相同的势，则从 Kuratowski[11]的结果得知它们博雷尔等价，且因此博雷尔等价φ可延拓为X与Y的博雷尔等价. 简单的例子(习题 25)表明X_0和Y_0可以有不同的势，因而出现一个或另一个是不可避免的. 然而，正如以下定理所证明的，若Φ是$\mathcal{A}/\mathfrak{N}$映上它自身的自同构，则它们可被排除.

21. 定理　令X为完备可分度量空间，$\mathcal{B}$为X的博雷尔集族，$\mathfrak{N}$是$\mathcal{B}$的σ理想. 若Φ是任何$\mathcal{B}/\mathfrak{N}$映上其自身的σ同构，则存在X映上它自身的一对一映射φ使得φ和φ^{-1}为博雷尔可测且$\Phi(A) = \varphi^{-1}[A]$模$\mathfrak{N}$.

证明　根据定理 20 存在属于$\mathfrak{N}$的集合X_0和Y_0与一对一的$X \sim Y_0$映上$X \sim X_0$的博雷尔可测映射ψ. 令

$$Z_0 = X_0 \cup Y_0, Z_1 = \psi[Z_0] \cup \psi^{-1}[Z_0], Z_{n+1} = \psi[Z_n] \cup \psi^{-1}[Z_n].$$

由于ψ和ψ^{-1}将$\mathfrak{N}$的集合映入$\mathfrak{N}$的集合，因此有$Z_n \in \mathfrak{N}$. 设$Z = \bigcup Z_n$，那么$Z \in \mathfrak{N}$，$\psi[Z] \subset Z$，且$\psi^{-1}[Z] \subset Z$. 因此ψ和ψ^{-1}是$X \sim Z$映入$X \sim Z$的一对一映射且由于它们是互逆的，因此它们必须将$X \sim Z$映上$X \sim Z$. 若$x \in X \sim Z$令$\varphi(x) = \psi(x)$，若$x \in Z$令$\varphi(x) = x$，这样来定义φ，则φ是X映上其自身的博雷尔等价且除在集合$Z \in \mathfrak{N}$外与ψ一致. ■

我们说度量空间X是拓扑完备的，若有一个等价的度量使它完备. 最后两节的命题和定理中X完备的条件可被X拓扑完备的条件代替，这是因为度量自身在这些命题和定理的结论中没有出现. 度量空间拓扑完备的条件等价于作为一个绝对的G_δ的条件：完备度量空间的每个G_δ是拓扑完备的，且任何度量空间的拓扑完备子集是一个G_δ. 因此X拓扑完备的条件保证X的博雷尔子集绝对可测，即它们是它们所嵌入的任何度量空间的博雷尔子集.　413

在本节的定理中完备性的假设对得到点映射是必要的，这可用以下例子说明. 存在集合$A \subset [0, 1]$满足$m^* A = 1$及$m^* B = 1$，其中$B = [0, 1] \sim A$(见 Halmos[5]，70 页). 令ψ：$\mathbf{R} \to \mathbf{R}$定义为$\psi(x) = -x$. 对于每个集合$E \subset \mathbf{R}$，令$h(E)$为它的可测包(见 12.6 节)，那么$h(E)$由

模零测度集确定，因而$h(E)$可取为$\mathcal{B}/\mathfrak{M}_0$的一个元素，其中$\mathcal{B}$是$[-1, 1]$的博雷尔子集类，$\mathfrak{M}_0$是零测度集类．令$X=A\cup\psi[B]$，且取$\mathfrak{A}$为形如$E=X\cap F$的$X$的子集的$\sigma$代数，其中$F$是博雷尔集，取$\mathfrak{N}$为由零测度集组成的$\mathfrak{A}$的子集，那么$h(X\cap F)$是属于$F$的等价类，因而$h$是$\mathfrak{A}/\mathfrak{N}$映上$\mathcal{B}/\mathfrak{M}_0$的$\sigma$同构．若定义$\Phi$为

$$\Phi(E) = X \cap \psi[h(E)],$$

则Φ是一个$\mathfrak{A}/\mathfrak{N}$映上其自身的$\sigma$同构．令$\Theta$为由$\Theta(F)=[F\cap X]$给出的$[-1, 1]$的博雷尔子集映上$\mathfrak{A}/\mathfrak{N}$的映射，那么诱导$\Phi\circ\Theta$的任何映射$\theta$：$X\to[-1, 1]$必须等于$\psi$几乎处处成立，但$X$和$\psi[X]$除0外不相交．从这可得到不存在诱导$\Phi$的点映射$\varphi$：$X\to X$．

在这个例子中我们看到相伴随的点映射应是ψ，但ψ不可能将X映入X，这是因为X有“太多裂缝”．用适当的度量将X完备化可填满这些裂缝使得ψ将X的点映为完备化过程中所增加的点．

习题

26. 证明定理20中集合X_0和Y_0(或至少它们中的一个)是无法避免的．[令X为$[0, 1]$的无理数集且$\mathfrak{M}=\{\varnothing\}$，$Y$为$[0, 1]$且$\mathfrak{N}$为所有有理数集的子集组成的集合，取$\Phi(E)=E$.]
27. 令$(X, \mathfrak{A}, \mathfrak{N})$为节末描述的例子．
    a. 证明对$[-1, 1]$的每个博雷尔子集F有$h(F\cap X)=[F]$，其中$[F]$为仅在零测度集上与F不同的博雷尔子集类．
    b. 证明Φ是$\mathfrak{A}/\mathfrak{N}$到其自身的$\sigma$同构．
    c. 证明若θ：$X\to[-1, 1]$诱导$\Phi\circ\Theta$，则θ几乎处处等于ψ．
    d. 证明不存在诱导Φ的点映射φ：$X\to X$．

414

15.7　L^p的等距

我们通过导出刻画$L^p[0, 1]$映上其自身的等距，即那些$L^p[0, 1]$映上其自身使得$\|Uf\|=\|f\|$的线性映射U来说明上一节定理的用途．我们从建立两个不等式开始，第一个不等式是关于实数(或复数)的而第二个不等式是关于空间L^p的元素的．

22. 引理　*令ξ和η为实数，那么若$2\leqslant p<\infty$，则*

$$|\xi+\eta|^p+|\xi-\eta|^p \geqslant 2(|\xi|^p+|\eta|^p),$$

而若$0<p\leqslant 2$，则

$$|\xi+\eta|^p+|\xi-\eta|^p \leqslant 2(|\xi|^p+|\eta|^p).$$

若$p\neq 2$，则等式仅当ξ或η等于零时成立．

证明　若$p=2$，我们有等式对于所有ξ和η成立．若$2<p<\infty$，则$1\leqslant p/2$，运用指数为$p/2$和$p/(p-2)$的赫尔德不等式于$\alpha^2+\beta^2$得到

$$\alpha^2+\beta^2 \leqslant (\alpha^p+\beta^p)^{2/p}(1+1)^{(p-2)/p}$$

或者

$$\alpha^p+\beta^p \geqslant 2^{(2-p)/2}(\alpha^2+\beta^2)^{p/2}. \tag{1}$$

若$0<p<2$，用$4/p$代替p，则(1)成为

$$\alpha^{4/p}+\beta^{4/p}\geqslant 2^{(p-2)/p}(\alpha^2+\beta^2)^{2/p}.$$

若我们用 $\alpha^{p/2}$ 代替 α 而用 $\beta^{p/2}$ 代替 β，该式变成

$$\alpha^2+\beta^2\geqslant 2^{(p-2)/p}(\alpha^p+\beta^p)^{2/p},$$

或者

$$\alpha^p+\beta^p\leqslant 2^{(2-p)/2}(\alpha^2+\beta^2)^{p/2}. \tag{2}$$

由于

415

$$0\leqslant\frac{\xi^2}{\xi^2+\eta^2}\leqslant 1,$$

我们有

$$\frac{|\xi|^p}{(\xi^2+\eta^2)^{p/2}}\leqslant\frac{\xi^2}{\xi^2+\eta^2}\qquad 2<p \tag{3}$$

和

$$\frac{|\xi|^p}{(\xi^2+\eta^2)^{p/2}}\geqslant\frac{\xi^2}{\xi^2+\eta^2}\qquad p<2. \tag{4}$$

对 η 得到类似的不等式且相加，我们分别得到

$$|\xi|^p+|\eta|^p\leqslant(\xi^2+\eta^2)^{p/2}\qquad 2<p \tag{5}$$

和

$$|\xi|^p+|\eta|^p\geqslant(\xi^2+\eta^2)^{p/2}\qquad p<2. \tag{6}$$

我们证明了仅当 $\xi=0$ 或 $\eta=0$ 时(3)或(4)的等式成立且因此(5)或(6)的等式成立.

假定 $p>2$，在(1)中用 $|\xi+\eta|$ 和 $|\xi-\eta|$ 分别代替 α 和 β，那么根据(5)，

$$\begin{aligned}|\xi+\eta|^p+|\xi-\eta|^p&\geqslant 2^{(2-p)/2}(|\xi+\eta|^2+|\xi-\eta|^2)^{p/2}\\&=2(\xi^2+\eta^2)^{p/2}\\&\geqslant 2(|\xi|^p+|\eta|^p)\end{aligned}$$

这就建立了引理的第一个不等式，且用(2)和(6)类似地得到第二个不等式. 我们看到在 $p\neq 2$ 的任何一种情形中仅当 $\xi=0$ 或 $\eta=0$ 时(3)和(4)的等式成立. ■

通过积分我们有以下引理，它是引理 22 的一个推论.

23. 引理 令 $1\leqslant p<\infty$，$p\neq 2$，并假定 f 和 g 属于 L^p，那么

$$\|f+g\|^p+\|f-g\|^p=2(\|f\|^p+\|g\|^p)$$

当且仅当 $f\cdot g=0$ 几乎处处成立.

24. 定理(Lamperti) 令 $1\leqslant p<\infty$，$p\neq 2$，U 是 $L^p[0,1]$ 到其自身的线性变换使得 $\|Uf\|_p=\|f\|_p$，那么存在一个$[0,1]$映上(几乎所有的)$[0,1]$的博雷尔可测映射 φ 和一个 $h\in L^p$ 使得

416

$$Uf=h\cdot(f\circ\varphi).$$

函数 h 惟一确定(在 a. e. 等价范围内)且 φ 在 $h\neq 0$ 的集合上惟一确定(在 a. e. 等价范围内). 对于任意博雷尔集 E，我们有

$$\int_{\varphi^{-1}[E]}|h|^p\mathrm{d}t=\int_E\mathrm{d}t.$$

证明 我们定义函数 f 的承载形为集合 $\{t: f(t)\neq 0\}$. 若 $f\in L^p$，则 f 的承载形仅模零集定义. 因此对于 $f\in L^p$，f 的承载形是模零测度集的博雷尔集的 σ 代数 $\mathcal{B}/\mathfrak{N}$ 的一个元素. 通过设 $\Phi(A)$ 等于 $U\chi_A$ 的支撑，我们定义 $[0, 1]$ 的博雷尔集到博雷尔集模零集的映射 Φ. 若 A 和 B 不相交，根据引理 23 我们有

$$\|\chi_A+\chi_B\|^p+\|\chi_A-\chi_B\|^p=2(\|\chi_A\|^p+\|\chi_B\|^p).$$

由于 U 线性且保持范数，再次运用引理 23，我们有

$$(U\chi_A)\cdot(U\chi_B)=0 \text{ a. e.}$$

因此 Φ 将不相交集映射到不相交集. 若 A 和 B 不相交，则 $\chi_{A\cup B}=\chi_A+\chi_B$，因而 $U\chi_{A\cup B}=U\chi_A+U\chi_B$. 由于右边的两个函数有不相交承载形，我们看到 $\Phi(A\cup B)=\Phi(A)\cup\Phi(B)$ 对于不相交集成立，因此对于任意博雷尔集对成立.

若 $\Phi[[0, 1]]=E$，我们有 $\Phi(\widetilde{A})=E\sim\Phi(A)$. 因此 Φ 是一个 $\mathcal{B}$ 到 E 的博雷尔子集的代数的同态映射. 若 $A=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$，其中 A_i 不相交，我们有

$$\chi_A=\lim\sum_{i=1}^{n}\chi_{A_i}$$

属于 L^p，因而根据 U 的连续性，

$$U\chi_A=\lim\sum_{i=1}^{n}U\chi_{A_i}.$$

因此 $\Phi(A)=\bigcup\Phi(A_i)$，且 Φ 是一个 σ 同态映射.

根据命题 3 存在一个博雷尔可测映射 φ，其将 E 映入 $[0, 1]$ 使得 $\Phi(A)=\varphi^{-1}[A]$. 由于 Φ 仅能将零测度集映到零测度集，因此除可能的零测度集外映射 φ 必须映上所有的 $[0, 1]$. 对于 [417] $t\notin E$，通过设 $\varphi(t)=0$ 将 φ 延拓为对于所有的 $[0, 1]$ 有定义.

函数 $1=\chi_{[0,1]}$ 属于 L^p. 令 $h=U(1)$，那么 $h\in L^p$ 且 h 的承载形是 E. 若 A 是 $[0, 1]$ 的任意博雷尔集，我们有 $1=\chi_A+\chi_{\tilde{A}}$，因此 $h=U\chi_A+U\chi_{\tilde{A}}$. 但右边的函数有不相交的承载形，因而在 $U\chi_A$ 的承载形上 $U\chi_A$ 必须等于 h. 因此 $U\chi_A=h\cdot\chi_{\Phi(A)}=h\cdot(\chi_A\circ\varphi)$. 因此，若 ψ 是任何简单函数，必须有 $U\psi=h\cdot(\psi\circ\varphi)$. 由于 L^p 的每个函数可被简单函数依范数逼近且 U 是范数保持，因此有 $Uf=h\cdot(f\circ\varphi)$ 对于所有 $f\in L^p$ 成立.

定理中剩下的结论现在容易得到. ■

习题

28. a. 证明若线性变换 U 是 $L^p[0, 1]$ 映上的，则 $X\sim E$ 具有零测度.
    b. 在这种情形中 φ 本质上是一对一的（即除一个零测度集外一对一），φ^{-1} 是可测的，且 φ 和 φ^{-1} 将零测度集映到零测度集. [提示：运用定理 24 于变换 U^{-1}，且运用定理的惟一性部分于 $I=UU^{-1}$ 与 $I=U^{-1}U$.]
    c. 证明在这种情形中若我们定义测度 μ 为 $\mu A=m(\varphi[A])$，则 $|h|^p=\left[\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}m}\right]$.

29. 你能对一般有限测度空间的 $L^p(X, \mu)$ 的等距说些什么？(一般来讲，你不能得到点映射但必须满意于集映射 Φ.)

30. 证明定理 24 中给出的刻画对 $L^2[0, 1]$ 不成立.

31. 一个巴拿赫空间 X 称为一致凸，若给定 $\varepsilon>0$，存在一个 $\eta<1$ 使得只要 u 和 v 是满足 $\|u\|=\|v\|=1$ 且 $\|u-v\|\geqslant 2\varepsilon$ 的 X 的元素，就有 $\|u+v\|\leqslant 2\eta$. 用积分形式的引理 22 证明当 $p\geqslant 2$ 时 L^p 是一致凸的且我们可以取 $\eta=(1-\varepsilon^p)^{1/p}$.

418

第 16 章　丹尼尔积分

16.1　引言

有时不使用测度的概念而直接引入积分是方便的，这发生在我们有了定义在某个“基本函数”的类 L 上的基本积分 I 而我们要放大函数类 L、延拓积分 I 使它具有抽象勒贝格积分的所有性质，包括收敛定理时的情形．例如，若我们取类 L 为由定义在 $(-\infty,\ \infty)$ 上且在有限区间外消失的连续实值函数组成且取 I 为黎曼积分，则期望通过某种延拓过程得到勒贝格可积函数类与勒贝格积分．对于这种情形丹尼尔首先实施了这么一个延拓过程，马绍尔·斯通推广了这个做法且澄清了这个延拓了的积分的结构．本章我们的目标就是描述这个延拓过程并且阐明它与测度论的联系．

令 L 为定义在某个集合 X 上的实值函数族，假定 L 是一个向量格，即只要函数 f 和 g 属于 L 就有 $\alpha f+\beta g$，$f\vee g$ 和 $f\wedge g$ 也属于 L．由于 $f\wedge g=f+g-(f\vee g)$，$f\vee g=(f-g)\vee 0+g$，我们看到由函数组成的向量空间 L 是向量格，若对于每个属于 L 的 h 有 $h\vee 0$ 属于 L，因此一个由函数组成的向量空间是向量格，若对于 f 的运算 $f^+=f\vee 0$ 封闭．由于 $|f|=f^+ +(-f)^+$，因此每个向量格包含该格中每个函数的绝对值．反过来，若 L 是一个向量空间使得对每个 f 属于 L 有 $|f|$ 属于 L，则 L 是一个向量格，这是由于 $f^+=\frac{1}{2}(f+|f|)$．

419

L 上的线性泛函 I 称为正的[⊖]，若 $I(\varphi)\geqslant 0$ 对于每个属于 L 的非负函数 φ 成立．若 I 是正的且 $\varphi\leqslant\psi$，则 $I(\varphi)\leqslant I(\psi)$．$L$ 上的正线性泛函 I 称为**丹尼尔泛函**或丹尼尔积分，若以下条件满足：

D. *若 $\langle\varphi_n\rangle$ 是属于 L 的函数序列且在每一点递减趋于零，则* $\lim I(\varphi_n)=0$．

这个条件显然等价于以下条件之一：

D′. *若 $\langle\varphi_n\rangle$ 是属于 L 的递增函数序列，且若 φ 是 L 中的函数使得*[⊜] $\varphi\leqslant\lim\varphi_n$，*则* $I(\varphi)\leqslant\lim I(\varphi_n)$．

D″. *若 $\langle u_n\rangle$ 是属于 L 的非负函数序列，且 φ 是 L 的一个函数使得* $\varphi\leqslant\sum u_n$，*则* $I(\varphi)\leqslant\sum I(u_n)$．

丹尼尔积分的一个例子是取 L 为定义在 $(-\infty,\ \infty)$ 上且在有限区间外消失的连续函数集且取 I 为黎曼积分．另一个例子来自于 X 的子集的代数 $\mathfrak{A}$ 上的测度 μ，我们通过取 L 为简单函数类且取 I 为关于 μ 的自然积分得到它．第三个例子由取 L 为关于测度 μ 的所有可积函数构成的类给出．

最后一个例子不太满足我们所给出的定义，这是因为可积函数可以是扩充的实值函数．因

⊖ 确切地说，我们应该称 I 为“非负”，但根据上下文的联系“正”的使用看来是标准的．

⊜ 当然，这里的 lim 指的是逐点极限．

此我们想拓广我们的定义以覆盖这种情形，但必须仔细处理函数 $f+g$ 在形如 $\infty-\infty$ 或 $-\infty+\infty$ 的点无定义这一事实. 因此我们说 L 是由 X 上扩充的实值函数组成的向量格，假定只要 f 和 g 属于 L，就有函数 $f\vee g$，$f\wedge g$ 和 αf 属于 L，就如同每个函数 h 使得 $h(x)=f(x)+g(x)$ 属于 L，只要右边有定义的话. 因此为使和式 $f+g$ 属于 L 我们要求它取所有可能的值，只要 h 是任何可能的值就写为 $h=f+g$. 谈到 L 上的线性泛函我们指的是从 L 到 $\mathbf{R}$ 的映射 I 使得 $I(\alpha f)=\alpha I(f)$ 且只要 $h=f+g$，$I(h)=I(f)+I(g)$. 这蕴涵着若 h_1 和 h_2 是两个满足 $h_1=f+g$ 与 $h_2=f+g$ 的函数，则 $I(h_1)=I(h_2)$. 420

若 L 上的正线性泛函 I 满足条件 D，我们便称它为一个丹尼尔积分.

我们允许 $f(x)+g(x)$ 在使得和式意义模糊的点 x 取所有可能的值，这一事实对使扩充的实值函数组成的向量格中的元素可能取无穷值的集 P 有一些结果. 因此我们称 X 的子集 P 为格 L 的极集，若存在函数 $h\in L$ 使得对所有 $x\in P$，$|h(x)|=\infty$.

1. 引理　令 P 为极集，$f\in L$ 且 g 为扩充的实值函数使得对于 $x\notin P$，$g(x)=f(x)$，那么 $g\in L$ 且 $I(g)=I(f)$.

证明　令 h 为 L 的满足对于 $x\in P$，$|h(x)|=\infty$ 的元素，那么无论 $h(x)-h(x)$ 在哪里定义都有

$$h(x)-h(x)=g(x)-f(x)$$

假定在所有意义模糊的情形我们取 $g(x)-f(x)=0$. 因此 $g-f$ 属于 L 且

$$I(g-f)=I(h)-I(h)=0.$$

因此

$$g(x)=f(x)+[g(x)-f(x)]$$

无论右边在哪里定义均成立. 因此 $g\in L$，且

$$I(g)=I(f)+I(g-f)=I(f).$$

■

运用引理 1，用实值函数代替 L 内扩充的实值函数，我们能建立以下命题.

2. 命题　令 L 为由 X 上扩充的实值函数组成的向量格，那么条件 D，D′和 D″等价.

一般来说 L 中函数的极限不一定在 L 中，而丹尼尔和斯通的程序，即本章我们要建立的程序，将 I 延拓到包含 L 和在适当的极限运算下封闭的类 L_1. 在很多方面这个延拓过程平行于卡拉泰奥多里关于测度的延拓过程，在 16.3 节，我们在不太强的限制条件下，证明该延拓了的积分事实上是关于某种适当测度的积分. 421

习题

1. 证明条件 D，D′和 D″等价.
2. 令 μ 为代数 $\mathcal{A}$ 上的测度，L 为 $\mathcal{A}$ 上的简单函数类，I 为关于 μ 的积分. 证明 L 是一个向量格且 I 是一个丹尼尔积分.
3. 令 L 为定义在 $(-\infty,\infty)$ 上且在有限区间外消失的连续实值函数族，I 为 L 上的黎曼积分. 证明 I 是一个丹尼尔积分. [提示：迪尼定理是有用的.]
4. 证明命题 2.

16.2　延拓定理

我们从考虑由 X 上所有扩充的实值函数组成的类 L_u 开始，它们中的每一个是 L 中的单调递增函数序列的极限．显然，若 f 和 g 属于 L_u，则函数 $\alpha f+\beta g$ 也属于 L_u，这里 α 和 β 是非负常数．若 $\langle\varphi_n\rangle$ 是 L 中的递增函数序列，则 $\langle I(\varphi_n)\rangle$ 必定是递增实数序列因而有极限(可以是 ∞)．我们试图定义 $\lim I(\varphi_n)$ 作为 I 对于函数 f 的值，而 f 为序列 $\langle\varphi_n\rangle$ 的逐点极限．为实现这个目标，我们需要知道这个值仅依赖于函数 f 而不依赖于极限是 f 的递增序列 $\langle\varphi_n\rangle$ 的选择，这由以下引理保证：

3. 引理　若 $\langle\varphi_n\rangle$ 和 $\langle\psi_m\rangle$ 是 L 的递增序列且 $\lim\varphi_n\leqslant\lim\psi_m$，则 $\lim I(\varphi_n)\leqslant\lim I(\psi_m)$.

证明　对于固定的 n，我们有 $\varphi_n\leqslant\lim\varphi_n\leqslant\lim\psi_m$，因而根据 (D')，$I(\varphi_n)\leqslant\lim I(\psi_m)$．因此 $\lim I(\varphi_n)\leqslant\lim I(\psi_m)$.　■

因此我们能够将泛函 I 延拓为 L_u 上的扩充的实值泛函使得它具有性质：对于 $f\leqslant g$ 有 $I(f)\leqslant I(g)$ 且对于正常数 α 和 β 及属于 L_u 的函数 f 和 g 有 $I(\alpha f+\beta g)=\alpha I(f)+\beta I(g)$．显然 L_u 是一个格，这是因为若 $\varphi_n\uparrow f$ 且 $\psi_n\uparrow g$，那么 $\varphi_n\wedge\psi_n\uparrow f\wedge g$ 且 $\varphi_n\vee\psi_n\uparrow f\vee g$.

422

4. 引理　一个非负函数 f 属于 L_u 当且仅当存在 L 中的非负函数序列 $\langle\psi_v\rangle$ 使得 $f=\sum_{v=1}^{\infty}\psi_v$．这种情形下 $I(f)=\sum_{v=1}^{\infty}I(\psi_v)$.

证明　“当”部分是平凡的.另一方面,令 f 是非负的且 $\varphi_n\uparrow f$,其中 $\varphi_n\in L$.用 $\varphi_n\vee 0$ 代替 φ_n,我们可以假定每个 φ_n 是非负的.设 $\psi_1=\varphi_1$,对于 $n>1$,$\psi_n=\varphi_n-\varphi_{n-1}$,那么 $f=\sum_{v=1}^{\infty}\psi_v$,且

$$
\begin{aligned}
I(f)&=\lim I(\varphi_n)\\
&=\lim I\Big(\sum_{v=1}^{n}\psi_v\Big)\\
&=\lim\sum_{v=1}^{n}I(\psi_v)\\
&=\sum_{v=1}^{\infty}I(\psi_v).
\end{aligned}
$$
■

5. 引理　令 $\langle f_n\rangle$ 为 L_u 内的非负函数序列,那么函数 $f=\sum_{n=1}^{\infty}f_n$ 属于 L_u 且 $I(f)=\sum_{n=1}^{\infty}I(f_n)$.

证明　对于每个 n 存在 L 中的非负函数的序列 $\langle\psi_{n,v}\rangle$ 使得 $f_n=\sum_{v=1}^{\infty}\psi_{n,v}$,因此 $f=\sum_{v,n}\psi_{n,v}$．由于整数对集合是可数的,因此 f 是 L 内的非负函数序列的和因而必须属于 L_u.也有

$$
\begin{aligned}
I(f)&=\sum_{v,n}I(\psi_{n,v})\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}I(f_n).
\end{aligned}
$$
■

对于 X 上的任意函数 f 我们定义上积分 $\bar{I}(f)$ 为

$$\overline{I}(f) = \inf_{\substack{g \geq f \\ g \in L_u}} I(g),$$

423

这里我们采用约定空集的下确界为$+\infty$. 定义下积分$\underline{I}$为$\underline{I}(f)=-\overline{I}(-f)$. 以下引理给出了这些上积分和下积分的基本性质，引理 6 的性质可由$\overline{I}$的定义直接得到.

6. 引理　令$h=f+g$，那么$\overline{I}(h)\leqslant\overline{I}(f)+\overline{I}(g)$，假定右边有定义. 若$c\geqslant 0$，则$\overline{I}(cf)=c\overline{I}(f)$. 若$f\leqslant g$，则$\overline{I}(f)\leqslant\overline{I}(g)$且$\underline{I}(f)\leqslant\underline{I}(g)$.

7. 引理　我们有$\underline{I}(f)\leqslant\overline{I}(f)$. 若$f\in L_u$，则$\underline{I}(f)=\overline{I}(f)=I(f)$.

证明　我们有$0=I(0)=I(f-f)\leqslant\overline{I}(f)+\overline{I}(-f)$，因此$\underline{I}(f)=-\overline{I}(-f)\leqslant\overline{I}(f)$.

为证明第二个陈述，我们注意到若$f\in L_u$，则根据$\overline{I}$的定义有$\overline{I}(f)\leqslant I(f)$. 若$g\in L_u$且$f\leqslant g$,那么$I(f)\leqslant I(g)$因而$I(f)\leqslant\overline{I}(f)$，这就得到$\overline{I}(f)=I(f)$. 若$\varphi\in L$，那么$-\varphi\in L\subset L_u$，因而$\overline{I}(-\varphi)=I(-\varphi)=-I(\varphi)$，因此$\underline{I}(\varphi)=I(\varphi)$. 但每个$f\in L_u$是$L$内的递增函数序列$\langle\varphi_v\rangle$的极限. 由于$f\geqslant\varphi_v$，因而有$\underline{I}(f)\geqslant\underline{I}(\varphi_v)=I(\varphi_v)$. 因此

$$\underline{I}(f) \geqslant \lim I(\varphi_v) = I(f).$$

由于$\underline{I}(f)\leqslant\overline{I}(f)=I(f)$，因此有$\underline{I}(f)=I(f)$. ■

8. 引理　令$\langle f_v\rangle$为非负函数序列，且令$f=\sum_{v=1}^{\infty}f_v$，那么$\overline{I}(f)\leqslant\sum_{v=1}^{\infty}\overline{I}(f_v)$.

证明　若$\overline{I}(f_v)=\infty$对于某个v成立，则完成定理的证明. 若不是这样，则给定$\varepsilon>0$，存在一个函数$g_v\in L_u$使得$f_v\leqslant g_v$，且

$$I(g_v) \leqslant \overline{I}(f_v) + \varepsilon \cdot 2^{-v}.$$

由于每个g_v非负，因此引理 5 蕴涵着函数$g=\sum g_v$属于L_u且$I(g)=\sum I(g_v)\leqslant\sum\overline{I}(f_v)+\varepsilon$. 由于$g\geqslant f$，因而有

$$\overline{I}(f) \leqslant \sum_{v=1}^{\infty}\overline{I}(f_v) + \varepsilon,$$

由于ε是任意正数因此我们得到引理. ■

424

我们称X上的一个函数f关于I **可积**(或I可积)，若$\overline{I}(f)=\underline{I}(f)$且这个值是有限的. 我们将关于$I$可积的函数类表示为$L_1$，对于$L_1$的函数$f$我们将$\overline{I}(f)$写为$I(f)$，因此便有了原有泛函$I$到$L_1$的所有函数的延拓. 以下命题给出了$L_1$和这个延拓了的$I$的性质：

9. 命题　集合L_1是一个包含L的函数的向量格，且I是L_1上的正线性泛函，其延拓了L上的泛函I.

证明　若f属于L_1，则cf也属于L_1，由于对于$c\geqslant 0$，$\overline{I}(cf)=c\overline{I}(f)=c\,\underline{I}(f)=\underline{I}(cf)$，且对于$c\leqslant 0$，$\overline{I}(cf)=c\,\underline{I}(f)=c\overline{I}(f)=\underline{I}(cf)$. 若$f$和$g$属于$L_1$，则

$$\overline{I}(f+g) \leqslant I(f) + I(g)$$

且

$$-\underline{I}(f+g) = \overline{I}(-f-g) \leqslant -I(f) - I(g),$$

即

$$\underline{I}(f+g) \geqslant I(f) + I(g).$$

因此

$$\underline{I}(f+g)=\bar{I}(f+g)=I(f)+I(g),$$

因而 $f+g$ 属于 L_1. 因此，L_1 是一个线形空间，且 I 是 L_1 上的线性泛函. 引理 7 蕴涵 $L_1\supset L$ 且我们关于 L_1 上的 I 的定义给出了与我们原来的 L 上的 I 一致的正线性泛函.

为证明 L_1 是一个格，仅需证明若 $f\in L_1$，则 $f^+\in L_1$. 令 $f\in L_1$，那么对于每个 $\varepsilon>0$ 存在 L_u 中的函数 f 和 g 使得 $-h\leqslant f\leqslant g$，也有 $I(g)<I(f)+\varepsilon<\infty$ 且 $I(h)\leqslant -I(f)+\varepsilon<\infty$. 由于 $g=(g\vee 0)+(g\wedge 0)$ 且 $(g\wedge 0)\in L_u$，因而有 $I(g\wedge 0)>-\infty$ 且 $I(g\vee 0)\leqslant I(g)-I(g\wedge 0)<\infty$. 因此函数 $g_1=g\vee 0$ 属于 L_u 且 $I(g_1)<\infty$. 令 $h_1=h\wedge 0$，那么 $h_1\in L_u$ 且 $-h_1\leqslant f^+\leqslant g_1$. 由于 $g\geqslant -h$，因此 $g_1+h_1\leqslant g+h$.

因此，$I(g_1)+I(h_1)\leqslant I(g)+I(h)<2\varepsilon$. 由于 $-I(h_1)\leqslant \underline{I}(f^+)\leqslant \bar{I}(f^+)\leqslant I(g_1)$，因此有 $\bar{I}(f^+)-\underline{I}(f^+)<2\varepsilon$，因而 $\bar{I}(f^+)=\underline{I}(f^+)$，这是由于 ε 是任意的. 由于 $0\leqslant \bar{I}(f^+)\leqslant I(g_1)<\infty$，

425 因而有 $f^+\in L_1$. 因此 L_1 是一个格. ■

以下命题是单调收敛定理对于 L_1 的类比，它也表明 L_1 和 I 满足条件 D′因此满足条件 D.

10. 命题 令 $\langle f_n\rangle$ 为 L_1 中的递增函数序列，且令 $f=\lim f_n$，那么 $f\in L_1$ 当且仅当 $\lim I(f_n)<\infty$. 在这种情形中 $I(f)=\lim I(f_n)$.

证明 由于 $f\geqslant f_n$，所以 $\bar{I}(f)\geqslant I(f_n)$. 因此若 $\lim I(f_n)=\infty$，则 $\bar{I}(f)=\infty$，且 $f\notin L_1$. 假定 $\lim I(f_n)<\infty$. 设 $g=f-f_1$，那么 $g\geqslant 0$，且 $g=\sum_{n=1}^{\infty}(f_{n+1}-f_n)$. 因此根据引理 8，

$$\begin{aligned}\bar{I}(g)&\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} I(f_{n+1}-f_n)\\&=\sum_{n=1}^{\infty} I(f_{n+1})-I(f_n)\\&=\lim I(f_n)-I(f_1).\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\bar{I}(f)&=\bar{I}(f_1+g)\\&\leqslant I(f_1)+\bar{I}(g)\leqslant \lim I(f_n).\end{aligned}$$

由于 $f_n\leqslant f$，我们有 $\underline{I}(f)\geqslant I(f_n)$，因而

$$\underline{I}(f)\geqslant \lim I(f_n).$$

因此 $\underline{I}(f)=\bar{I}(f)=\lim I(f_n)$. ■

11. 系 泛函 I 是向量格 L_1 上的丹尼尔积分.

以下两个命题是关于积分 I 的法图引理和勒贝格收敛定理的类比.

12. 命题 令 $\langle f_v\rangle$ 为属于 L_1 的非负函数序列，那么函数 $\inf f_v$ 属于 L_1，且若 $\underline{\lim} I(f_v)<\infty$，则函数 $\underline{\lim} f_v$ 属于 L_1. 在这种情形下，

$$I(\underline{\lim} f_v)\leqslant \underline{\lim} I(f_v).$$

证明 令 $g_n=f_1\wedge f_2\wedge\cdots\wedge f_n$，那么 $\langle g_n\rangle$ 是属于 L_1 的非负函数序列，它递减趋

426 于 $g=\inf f_v$. 因此 $-g_n\uparrow -g$，且由于 $I(-g_n)\leqslant 0$，根据命题 10 我们必须有 $g\in L_1$.

为证明命题的其余部分，令 $h_n=\inf\limits_{v\geqslant n} f_v$，那么 $\langle h_n\rangle$ 是属于 L_1 的非负函数序列，它递增趋于 $\underline{\lim} f_v$.

由于对于 $n\leqslant v$，$h_n\leqslant f_v$，$\lim I(h_n)\leqslant \underline{\lim} I(f_v)<\infty$，因此根据命题 10，$\underline{\lim} f_v\in L_1$ 且 $I(\underline{\lim} f_v)\leqslant \underline{\lim} I(f_v)$. ■

13. 命题 *令 $\langle f_n\rangle$ 为属于 L_1 的函数序列且假定存在函数 $g\in L_1$ 使得对于所有 n 我们有 $|f_n|\leqslant g$，那么若 $f=\lim f_n$，我们有*

$$I(f)=\lim I(f_n).$$

证明 函数 f_n+g 非负，且 $I(f_n+g)\leqslant 2I(g)$，因此根据命题 12 我们有 $f+g$ 属于 L_1 且

$$I(f+g)\leqslant \underline{\lim} I(f_n+g)=I(g)+\underline{\lim} I(f_n).$$

因此

$$I(f)\leqslant \underline{\lim} I(f_n).$$

由于函数 $g-f_n$ 也非负，因此有

$$\begin{aligned} I(g-f) &\leqslant \underline{\lim} I(g-f_n) \\ &= I(g)-\overline{\lim} I(f_n). \end{aligned}$$

因此

$$\overline{\lim} I(f_n)\leqslant I(f),$$

因而 $\lim I(f_n)$ 存在且等于 $I(f)$. ■

习题

5. 函数 f 属于 L_u 当且仅当 $f=g+\varphi$，其中 $g\in L_u$，$g\geqslant 0$ 且 $\varphi\in L$.
6. 证明引理 6.
7. 证明引理 6 含义模糊的情形不会造成引理 7 的困难.

16.3 惟一性

本节证明将 L 上的丹尼尔积分 I 延拓到 L_1 是惟一的. 我们从证明以下描述 L_1 的函数结构的命题开始. 该命题本身也具有独立意义，它是命题 12.7 对于 I 的类比. [427]

我们用 L_{ul} 表示 X 上的那些为 L_u 内的满足 $I(f_n)<\infty$ 且 $\lim I(f_n)>-\infty$ 的递减函数序列 $\langle f_n\rangle$ 的极限的函数类，然后将命题 10 运用于 $\langle -f_n\rangle$ 得到 $L_{ul}\subset L_1$. 若 f 是 X 上的任意函数使得 $\bar{I}(f)$ 有限，则给定 n 我们能找到 $h_n\in L_u$ 使得

$$f\leqslant h_n \text{ 及 } I(h_n)\leqslant \bar{I}(f)+\frac{1}{n}.$$

设 $g_n=h_1\wedge h_2\wedge\cdots\wedge h_n$，我们有 $f\leqslant g_n\leqslant h_n$，因而 $\langle g_n\rangle$ 是属于 L_u 的递减函数序列，满足 $\bar{I}(f)\leqslant I(g_n)\leqslant \bar{I}(f)+1/n$. 因此函数 $g=\lim g_n$ 属于 L_{ul}，而 $f\leqslant g$ 且 $\bar{I}(f)=I(g)$. 我们因此建立了以下引理：

14. 引理 *若 f 是 X 上的任意函数使得 $\bar{I}(f)$ 有限，则存在一个函数 $g\in L_{ul}$ 使得 $f\leqslant g$ 且 $\bar{I}(f)=I(g)$.*

X 上的一个函数 f 称为**零函数**，若 $f\in L_1$ 且 $I(|f|)=0$. 若 f 是零函数且 $|g|\leqslant f$，

则 $0\leqslant \underline{I}(|g|)\leqslant \bar{I}(|g|)\leqslant I(f)=0$. 因此 $g\in L_1$，且 g 是一个零函数.

15. 命题　X 上的函数 f 属于 L_1 当且仅当 f 是 L_u 中的函数 g 与非负零函数 h 的差 $g-h$. 一个函数 h 是一个零函数当且仅当存在 L_u 中的零函数 k 使得 $|h|\leqslant k$.

证明　若 $f=g-h$，则 f 是 L_1 中的两个函数的差因而它自身必须属于 L_1. 若 $|h|\leqslant k$，其中 k 为零函数，则 h 是一个零函数.

若 f 属于 L_1，则引理 14 断言存在 $g\in L_u$ 使得 $f\leqslant g$ 且 $I(f)=I(g)$. 因此 $h=g-f$ 是一个非负函数且 $I(h)=0$，这使得 h 是一个零函数. 若 h 是零函数，则根据引理 14 存在一个函数 $k\in L_u$ 满足 $|h|\leqslant k$ 且 $I(k)=I(|h|)=0$. ■

16. 命题　令 I 为由 X 上的函数组成的向量格 L 上的丹尼尔积分且令 J 为向量格 $\Lambda\supset L$ 上的丹尼尔积分，若对于所有 $f\in L$ 有 $I(f)=J(f)$，则 $\Lambda_1\supset L_1$ 并且对于所有 $f\in L_1$，$I(f)=J(f)$.

428

证明　运用命题 10 两次我们看到 $L_u\subset\Lambda_1$ 且对于 $f\in L_u$，$I(f)=J(f)$，因此根据命题 15 的第二部分，每个关于 I 为零的函数必须也关于 J 为零. 根据命题 15 的第一部分，每个属于 L_1 的函数 f 必须属于 Λ_1，且 $I(f)=J(f)$. ■

16.4　可测性与测度

我们说 X 上的非负函数 f 是**可测的**(关于 I)，若对于每个 g 属于 L_1 有 $g\wedge f$ 属于 L_1.

17. 引理　若 f 和 g 是非负可测函数，则 $f\wedge g$ 和 $f\vee g$ 是非负可测函数. 若 $\langle f_n\rangle$ 是非负可测函数序列，其逐点收敛于函数 f，则 f 可测.

证明　若 f 和 g 是非负可测函数且 h 属于 L_1，则 $h\wedge(f\wedge g)=(h\wedge f)\wedge(h\wedge g)$ 且 $h\wedge(f\vee g)=(h\wedge f)\vee(h\wedge g)$. 因此由 L_1 是一个格可得到 $f\wedge g$ 和 $f\vee g$ 的可测性. 若 $\langle f_n\rangle$ 是一个收敛到 f 的非负可测函数序列且 g 是一个 L_1 中的函数，则 $\langle f_n\wedge g\rangle$ 是一个 L_1 中的收敛到 $f\wedge g$ 的函数序列. 由于 $|f_n\wedge g|\leqslant|g|$，根据命题 13 我们有 $f\wedge g$ 属于 L_1. ■

18. 引理　令 f 为 X 上的一个非负函数，若对于每个 $\varphi\in L$，$\varphi\wedge f$ 属于 L_1，则 f 关于 I 可测.

证明　若 $\varphi\in L$，则 $\varphi\wedge f\in L_1$，命题 10 蕴涵对于 $g\in L_u$ 且 $I(g)<\infty$，$g\wedge f\in L_1$. 根据命题 13，对于所有 $g\in L_u$，$g\wedge f\in L_1$. 若 h 是 L_1 的任意函数，则命题 15 告诉我们 $h=g-k$，这里 $g\in L_u$ 且 k 是一个非负零函数. 由于 $0\leqslant g\wedge f-h\wedge f\leqslant k$，函数 $h\wedge f$ 与可积函数 $g\wedge f$ 相差一个零函数. 因此 $h\wedge f$ 是可积的，这就证明了 f 是可测的. ■

我们说 X 中的集合 A 是关于 I **可测的**，若其特征函数 χ_A 可测. 我们说集合 A 是**可积的**，若它的特征函数 χ_A 可积. 注意到可积集的可测子集其自身可积.

429

19. 引理　若 A 和 B 是可测集，则集合 $A\cup B$，$A\cap B$ 与 $A\sim B$ 也是可测集. 若 $\langle A_n\rangle$ 是可测集序列，则集合 $\bigcap A_n$ 和 $\bigcup A_n$ 可测. 若函数 1 可测，则可测集类 $\mathfrak{A}$ 是一个 σ 代数.

证明　$A\cap B$ 和 $A\cup B$ 的可测性由事实 $\chi_{A\cap B}=\chi_A\wedge\chi_B$ 和 $\chi_{A\cup B}=\chi_A\vee\chi_B$ 得到. 若 g 属于 L_1，我们有 $g\wedge\chi_{A\sim B}=g\wedge\chi_A-g\wedge\chi_{A\cap B}+g\wedge 0$，而 $A\sim B$ 的可测性由 A 和 B 的可测性得到. 若 $A=\bigcup A_n$，则

$$\chi_A = \lim(\chi_{A_1} \vee \cdots \vee \chi_{A_n})$$

而 A 的可测性由引理 17 得到．对于 $\bigcap A_n$ 可作类似讨论．若 1 是可测函数，则集合 X 是可测集，且可测集的补集是可测的．■

20. 引理　若 1 是可测函数且 f 是非负可积函数，则对于每个实数 α 集合

$$E = \{x : f(x) > \alpha\}$$

可测．

证明　若 α 是负的，则 $E=X$ 是可测的，这是由于 $\chi_E=1$ 且 1 是可测的．因此我们假定 $\alpha \geqslant 0$．若 $\alpha=0$，设 $g=f$；若 $\alpha>0$，设 $g=(\alpha^{-1}f)-[(\alpha^{-1}f)\wedge 1]$．由于 g 是 L_1 内的两个函数的差，因此 g 属于 L_1．在两种情形中对于 $x\in E$ 我们有 $g(x)>0$ 且对于 $x\in\widetilde{E}$，$g(x)=0$．令 $\varphi_n=1\wedge(ng)$，那么 $\varphi_n\in L_1$ 且 $\varphi_n\uparrow\chi_E$．因此 χ_E 是可测的，因而 E 是可测的．■

21. 引理　令函数 1 为可测且定义可测集类 $\mathfrak{A}$ 上的集函数为

$$\mu E = I(\chi_E).$$

若 χ_E 是可积的，且其他情况下 $\mu E=\infty$，那么 μ 可测．

证明　我们有 $\mu\varnothing=I(0)=0$．若 A 和 B 是满足条件 $A\subset B$ 的可积集，则有 $\chi_A\leqslant\chi_B$，因而 $\mu A\leqslant\mu B$．因此对于可积集 μ 单调且因此对于可测集 μ 单调．

令 $\langle E_i\rangle$ 是不相交的可测集序列，且令 $E=\bigcup E_i$．若每个 E_i 不可积，则 E 不可积，且

$$\mu E=\infty=\sum\mu E_i.$$

[430]

若每个 E_i 可积，根据命题 10，E 可积当且仅当 $\sum\mu E_i<\infty$，这是由于 $\chi_E=\sum\chi_{E_i}$．在这两种情形中都有 $\mu E=\sum\mu E_i$，且测度 μ 是可数加性的．■

测度 μ 具有性质：可积集恰好是具有有限测度的可测集．以下定理告诉我们 L_1 上的丹尼尔积分 I 等价于关于该测度 μ 的积分．

22. 定理(斯通)　令 L 为由 X 上的函数组成的向量格且具有性质：若 $f\in L$ 则 $1\wedge f\in L$，且令 I 为 L 上的丹尼尔积分．那么存在一个 X 的子集的 σ 代数 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{A}$ 上的测度 μ 使得每个 X 上的函数 f 关于 I 可积当且仅当它关于测度 μ 可积．此外，

$$I(f) = \int f\,\mathrm{d}\mu.$$

证明　令 $\mathfrak{A}$ 为关于 I 可测的集类，根据引理 18 知 1 可测．引理 19 断言 $\mathfrak{A}$ 是一个 σ 代数，且引理 20 断言每个非负 I 可积函数关于 $\mathfrak{A}$ 可测．由于每个 I 可积函数是两个非负 I 可积函数的差，因此每个 I 可积函数必定关于 $\mathfrak{A}$ 可测．

令 μ 为引理 21 给出的测度，且令 f 为关于 I 可积的非负函数．对于每对正整数 $\langle k, n\rangle$ 令

$$E_{k,n} = \{x : f(x) > k2^{-n}\}.$$

那么 $E_{k,n}$ 可测，且由于

$$\chi_{E_{k,n}} = \chi_{E_{k,n}} \wedge (k^{-1}2^n f),$$

我们有 $\chi_{E_{k,n}}\in L_1$，且 $\mu(E_{k,n})<\infty$．设

[431]

$$\varphi_n = 2^{-n}\sum_{k=1}^{2^{2n}}\chi_{E_{k,n}}.$$

那么 $\varphi_n\in L_1$ 且 $\varphi_n\uparrow f$，因此 $I(f)=\lim I(\varphi_n)$．但

$$I(\varphi_n) = 2^{-n}\sum_{k=1}^{2^{2n}}I(\chi_{E_{k,n}}) = 2^{-n}\sum_{k=1}^{2^{2n}}\mu(E_{k,n}) = \int\varphi_n\mathrm{d}\mu.$$

由于根据单调收敛定理，

$$\int f\mathrm{d}\mu = \lim\int\varphi_n\mathrm{d}\mu$$

我们有

$$I(f) = \int f\mathrm{d}\mu,$$

且 f 关于 μ 可积．由于任意 I 可积函数 f 是两个非负 I 可积函数的差，这样的 f 必关于 μ 可积且

$$I(f) = \int f\mathrm{d}\mu.$$

若 f 是 X 上的非负可测函数其关于 μ 可积，则我们如前构造 $E_{k,n}$ 和 φ_n．由于 $\int f\mathrm{d}\mu<\infty$，每个 $E_{k,n}$ 具有有限测度，因而 $\chi_{E_{k,n}}$ 和 φ_n 属于 L_1．由于 $\varphi_n\uparrow f$ 且 $\lim I(\varphi_n)=\int f\mathrm{d}\mu<\infty$，根据命题 10 我们有 $f\in L_1$．因此每个关于 μ 可积的 f 也关于 I 可积．■

23. 命题　令 L 为由集合 X 上的函数组成的向量格且假定 $1\in L$，令 $\mathcal{B}$ 为 X 的子集的最小 σ 代数，它使得每个属于 L 的函数关于 $\mathcal{B}$ 可测，那么对于每个丹尼尔积分 I 惟一存在 $\mathcal{B}$ 上的测度 μ 使得对于每个 $f\in L$

$$I(f) = \int f\mathrm{d}\mu.$$

[432]

证明　μ 的存在性是定理 22 的特殊情形，我们仅需证明 μ 在 $\mathcal{B}$ 上的惟一性．令 $\mathfrak{a}$ 为引理 19 给出的可测集的 σ 代数．引理 20 断言每个属于 L 的 f 关于 $\mathfrak{a}$ 可测，因而我们必有 $\mathcal{B}\subset\mathfrak{a}$．由于 $1\in L$，对于每个属于 $\mathfrak{a}$ 的 B 且因此对于每个属于 $\mathcal{B}$ 的 B，函数 χ_B 属于 L_1．若能证明对每个属于 $\mathcal{B}$ 的 B 有 $\mu(B)=I(\chi_B)$，我们就能建立 μ 在 $\mathcal{B}$ 上的惟一性．

若我们令 Λ 为 X 上关于 $\mathcal{B}$ 可测且关于 μ 可积的函数的集合，且对于 $f\in\Lambda$ 设

$$J(f) = \int f\mathrm{d}\mu$$

那么命题 16 蕴涵对于 $f\in L_1\cap\Lambda$，$J(f)=I(f)$．但若 $B\in\mathcal{B}$，则 $\chi_B\in L_1\cap\Lambda$，因而

$$\begin{aligned}\mu B &= J(\chi_B)\\ &= I(\chi_B).\end{aligned}$$

因此在 $\mathcal{B}$ 上 μ 由 I 惟一确定．■

若用较弱的假设即存在属于 L_1 的处处为正的函数来代替 $1\in L$ 的假设，我们仍然能够建立命题中测度 μ 的惟一性(习题 10)．没有这些假设 μ 在 $\mathcal{B}$ 上可能不惟一(习题 11)．

习题

8. 令 μ 为集代数$\mathcal{A}$上的测度，且令 L 为由$\mathcal{A}$中具有有限测度的集合的特征函数的有限线性组合的函数组成的函数族，且令 I 为关于μ 的积分. 讨论 I 到 L_1的延拓，且将此过程对比于对 μ 的卡拉泰奥多里延拓过程.
9. 根据定义直接证明，若 f_1和 f_2是两个非负可测函数，则 f_1+f_2 可测.
10. 证明：若用存在属于 L_1 的处处正的函数 e 的假设代替 $1\in L$ 的假设，则命题 23 的结论仍成立. [提示：$X=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{x:\ e(x)>1/n\}$，且这个给出的证明能够被修改以证明 μ 在包含于$\{x:\ e(x)>1/n\}$的$\mathcal{B}$的集合上惟一.]
11. 令 $X=(-\infty,\infty)\cup\{\omega\}$，且令 L 为由 X 上的那些在$(-\infty,\infty)$上勒贝格可积并在 ω 消失的所有函数组成的，那么 L 是一个向量格，且关于每个属于 L 的函数可测的最小σ 代数是由所有使得 $B\cap(-\infty,\infty)$ 勒贝格可测的集合 B 组成的族$\mathcal{B}$. 令 L 上的 I 定义为 $I(f)=\int f(x)\mathrm{d}x$，那么 I 是L 上的一个丹尼尔积分. 定理 22 中构造的测度μ是什么呢?证明存在另一个定义在$\mathcal{B}$上的测度 v 使得对于每个属于 L 的 f，$I(f)=\int f\mathrm{d}v$. [433]
12. a. 定义 I 可测集上的测度μ 为$\mu E=I(\chi_E)$若 E 可积，否则 $I(\chi_E)=\sup\{I(\chi_A):A\subset E,A$ 可积$\}$. 证明 μ 是一个测度且是使得 $I(f)=\int f\mathrm{d}\mu$ 的最小测度.
    b. 证明对该测度 $\mu(X)=\|I\|=\sup\{I(f):f\in L,f\leqslant 1\}$.
    c. 证明若 $\|I\|<\infty$，则该测度 μ 是使得 $I(f)=\int f\mathrm{d}\mu$ 且 $\mu(X)=\|I\|$ 的惟一测度. [434]

参考文献

A. 教材与标准参考书

[1] S. BANACH, *Théorie des Opérations Linéaires*, 2nd ed., Reprint, New York, Chelsea Publishing Co.

[2] G. BIRKHOFF and S. MACLANE, *Survey of Modern Algebra*, 4th ed., New York, Macmillan, 1977.

[3] M. M. DAY, *Normed Linear Spaces*, 3rd ed. (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, No. 21), Springer-Verlag, 1973.

[4] N. DUNFORD and J. T. SCHWARTZ, *Linear Operators*, Part I, New York, Wiley-Interscience, 1958.

[5] P. R. HALMOS, *Measure Theory*, Reprint, Springer-Verlag, 1974.

[6] P. R. HALMOS, *Naive Set Theory*, Reprint, Springer-Verlag, 1974.

[7] T. HAWKINS, *Lebesgue's Theory of Integration, Its Origins and Development*, Reprint, New York, Chelsea Publishing Co., 1975.

[8] E. HILLE and R. S. PHILLIPS, *Functional Analysis and Semigroups*, Revised ed. (Colloquium Publications, Vol. 31), Providence, American Mathematical Society, 1957.

[9] J. L. KELLEY, *General Topology*, Reprint, Springer-Verlag, 1975.

[10] J. L. KELLEY, I. NAMIOKA, et al., *Linear Topological Spaces*, New York, Van Nostrand, 1963.

[11] K. KURATOWSKI, *Topology*, Vol. 1, New York, Academic Press, 1966.

[12] W. RUDIN, *Real and Complex Analysis*, 3rd ed., McGraw-Hill, 1986.

[13] S. SAKS, *Theory of the Integral* (Monografje Matematyczne, Vol. 7), Warsaw, 1937.

[14] P. C. SUPPES, *Axiomatic Set Theory*, Reprint, New York, Dover Publishing Co., 1972.

B. 其他参考书

[15] N. BOURBAKI, *Topologie Général*, Paris, Hermann et Cie., 1971.

[16] C. CARATHÉODORY, *Vorlesungen über reelle Funktionen*, Reprint, New York, Chelsea Publishing Co., 1946.

[17] C. CARATHÉODORY, *Algebraic Theory of Measure and Integration*, Reprint, New York, Chelsea Publishing Co., 1963.

[18] A. HAAR, *Der Massbegriff in der Theorie der kontinuierlichen Gruppen*, Ann. of Math. (2) 34 (1933) 147–169.

[19] G. H. HARDY, J. E. LITTLEWOOD, and G. PÓLYA, *Inequalities*, New York, Cambridge University Press, 1934.

[20] A. HURWITZ, *Über die Erzeugung der Invarianten durch Integration*, Gött. Nachr. (1897) 71–90.

[21] J. E. LITTLEWOOD, *Lectures on the Theory of Functions*, Oxford, 1944.

[22] L. H. LOOMIS, *An Introduction to Abstract Harmonic Analysis*, New York, Van Nostrand, 1953.

[23] A. MARKOV, *On mean values and exterior densities*, Mat. Sbornik N.S. 4 (46) (1938) 165–191.

[24] F. RIESZ, *Sur les opérations fonctionnelles linéaires*, C.R. Acad. Sci. Paris 149 (1909) 974–977.

[25] F. RIESZ and B. NAGY, *Functional Analysis*, English ed., New York, Ungar, 1956.

[26] M. E. RUDIN, *A new proof that metric spaces are paracompact*, Proc. Amer. Math. Soc. 20 (1969) 603.

[27] A. WEIL, *L'intégration sur les groupes topologiques et ses applications*, Paris, Hermann et Cie., 1940.

符号索引

索引中的页码为英文原书页码，与书中页边标注的页码一致.

主题索引

索引中的页码为英文原书页码，与书中页边标注的页码一致.

A

B

C

⊖ 括号中的数字为习题号.

D

E

F

Σ

S

T

U

V

W

Z

[General Information]
书名=实分析　（原书第3版）
作者=（美）H.L.ROYDEN著　叶培新译
页数=290
SS号=11529734
DX号=
出版日期=2006年01月第1版
出版社=机械工业出版社